

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ»



На правах рукописи
УДК 53.08:530.145

Белинский Леонид Владимирович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ
ВЫСОКОТОЧНОЙ ТОМОГРАФИИ КВАНТОВЫХ
СОСТОЯНИЙ**

Специальность 05.27.01 —

«Твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты, микро- и
наноэлектроника, приборы на квантовых эффектах»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Богданов Юрий Иванович

Москва — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	5
 Глава 1. Анализ эффективности протоколов квантовых измерений	
поляризационных трёхфотонных состояний	12
1.1 Способы генерации трифотонов	12
1.2 Поляризационные состояния трифотонов	13
1.3 Протокол квантовых измерений и точность восстановления квантовых состояний	15
1.4 Томография невырожденных трифотонных состояний	17
1.4.1 Результаты численных экспериментов	18
1.5 Томография вырожденных трифотонных состояний	20
1.6 Выводы по главе	22
 Глава 2. Оптимизация протоколов томографии квантовых состояний	
2.1 Построение протоколов квантовой томографии с помощью численной оптимизации	25
2.2 Свойства решений	26
2.2.1 Структура решений	28
2.3 Потери точности при томографии методом максимального правдоподобия	29
2.4 Выводы по главе	30
 Глава 3. Поляризационные квантовые операции в анизотропной	
среде с дисперсией	34
3.1 Томография квантового процесса	35
3.2 Расчет χ -матрицы для волновой пластинки с учетом дисперсии	38
3.3 Результаты численных экспериментов	40
3.4 Протокол квантовых измерений и анализ экспериментальных данных	43

3.5	Учет аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах	48
3.6	Исследование явления поляризационного эха	52
3.7	Выводы по главе	56
 Глава 4. Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений		
4.1	Статистическое восстановление квантовых состояний	63
4.2	Методика, алгоритм и результаты численных экспериментов	65
4.3	Выработка адекватной модели квантового состояния с использованием критерия хи-квадрат	70
4.4	Выводы по главе	75
 Глава 5. Исследование корреляционных функций высокого порядка с использованием состояний с многофотонным отщеплением и квадратурных измерений		
5.1	Производящие и корреляционные функции	79
5.2	Сжатый вакуум: производящие и корреляционные функции	81
5.3	Компаунд-распределение Пуассона	82
5.4	Квадратурное измерение состояний	85
5.4.1	Доверительные области оценок	87
5.5	Многоуровневая иерархия компаунд-распределений Пуассона	89
5.6	Выводы по главе	92
Заключение		94
Список сокращений и условных обозначений		96
Список литературы		97
Список рисунков		114
Список таблиц		118

**Приложение А. Оценка адекватности результатов гомодинной
квантовой томографии с использованием критериев**

Пирсона и Смирнова	120
A.1 Использование критерия Пирсона для проверки согласия	120
A.2 Использование критерия Колмогорова-Смирнова	128
A.3 Оценка согласия по значениям функции распределения	132
A.3.1 Проверка согласия по значениям функции распределения с использованием критерия Пирсона	134

Введение

В настоящее время известно несколько классов задач, для которых существующие алгоритмы вычислений на квантовых компьютерах значительно превосходят по эффективности все известные классические аналоги. Одной из этих задач является моделирование квантовых эффектов, играющее важную роль в современной химии, нанотехнологии и смежных областях. Благодаря этому, создание полноценного квантового компьютера с числом квантовых бит, достаточным для проведения практически значимых вычислений представляет большой интерес.

Квантовые измерения являются основным средством для контроля квантовых состояний и процессов при разработке технологий квантовых вычислений [1—6] и квантовой связи [7; 8]. Прецизионные методы квантовых измерений необходимы и для глубокого понимания таких фундаментальных квантовых явлений как запутанность [9], дискорд [10—13] и телепортация [14]. Кроме того, возможность прецизионного контроля квантовых состояний является необходимым условием создания масштабируемого квантового компьютера [15; 16].

Таким образом, разработка высокоточных методов квантовой томографии представляет большой практический интерес.

На данный момент наиболее распространенным методом квантовой томографии является метод максимального правдоподобия [17; 18]. В большинстве случаев метод применяется без анализа количества степеней свободы исследуемого состояния или процесса. Это приводит к неэффективному использованию данных и субоптимальной точности оценок. Для преодоления этого недостатка был разработан корневой подход к статистическому восстановлению квантовых состояний [18]. Этот подход заключается в статистической реконструкции квадратного корня из матрицы плотности с выбором адекватной модели, содержащей оптимальное для томографии число параметров, на основе процедуры очищения квантовых состояний.

В случае томографии состояний конечномерных систем, известен метод применения корневого подхода, позволяющий определять оптимальное число параметров модели, используемой для реконструкции квантового состояния, что, в свою очередь, позволяет максимально эффективно использовать имеющиеся данные для оценки исследуемого состояния. Благодаря этому, решающим факто-

ром, определяющим точность результатов томографии при фиксированном объеме экспериментальных данных, становится выбор набора операторов измерения, используемых для получения данных. Таким образом, исследование оптимальной методики выбора экспериментальных протоколов квантовой томографии конечномерных систем является актуальной задачей.

Наряду с томографией конечномерных систем, важной является и задача томографии состояний электромагнитного поля. Возможные оптические состояния обладают бесконечным разнообразием, однако в настоящий момент существует очень ограниченный набор классов состояний, доступных в эксперименте и представляющих интерес для задач квантовой оптики и квантовой информатики. Среди них — суперпозиции фоковских состояний, когерентные состояния, суперпозиция когерентных состояний (в частности, состояние кота Шредингера), сдвинутые и сжатые фоковские состояния. Часто в процессе томографии исследуемое состояние представляется в фоковском базисе, при этом для полноценного представления нередко необходимо учитывать несколько десятков или сотен фоковских состояний, что приводит к большому числу восстанавливаемых действительных коэффициентов, а значит, к малой точности восстановления. Благодаря этому актуальной является задача исследования методов томографии оптических состояний с использованием моделей, наиболее близко соответствующих природе исследуемых состояний, с целью увеличить точность результатов благодаря использованию оптимального числа степеней свободы для моделирования состояний.

Еще один важный класс состояний света — тепловые состояния. Несмотря на то, что тепловые состояния света являются практически классическими объектами, они обладают квантовыми корреляциями, в частности их нормированная автокорреляционная функция в нуле $g^{(2)}(0) = 2$. Это замечательное свойство позволяет использовать такие поля в тех же приложениях, в которых себя хорошо зарекомендовали бифотонные поля. Среди них призрачное изображение (ghost imaging), квантовое освещение (quantum illumination), оптическая когерентная томография. В связи с этим, возможность точного контроля качества тепловых состояний имеет большую практическую значимость, а исследование поведения этих состояний при добавлении и отщеплении фотонов является актуальным.

Важным этапом квантовой томографии является проверка согласия между моделью, полученной в результате квантовой томографии, и данными по которым производилась томография. В частности, в корневом подходе проверка согласия

используется для выбора оптимального числа параметров модели квантового состояния, что позволяет получать максимально точные оценки при заданном размере выборки [18].

В случае томографии конечномерных систем, выборка распределена согласно мультиномиальному распределению, и критерий согласия Пирсона хорошо подходит для проверки адекватности. В случае же квантовой томографии состояний света на основе данных, полученных с помощью гомодинных измерений, распределение выборки имеет более сложный характер и требует иного подхода к оценке адекватности. Отсутствие данных о поведении статистических критериев при оценке адекватности результатов томографии оптических состояний обуславливает актуальность их исследования.

Целью данной работы является совершенствование методов квантовой томографии посредством разработки и анализа протоколов прецизионных измерений для систем конечной размерности и квантовых состояний электромагнитного поля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний, обеспечивающий высокую точность реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены.
2. Разработать методы, алгоритмы и программы для получения высококачественных протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности.
3. Разработать методы, алгоритмы и программы томографии поляризационных квантовых операций на базе кварцевых пластинок с учетом дисперсии и формы спектра входного излучения.
4. Провести анализ взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений электромагнитного поля и разработать более совершенный метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных измерений. Разработать методы проверки адекватности результатов томографии оптических квантовых состояний по квадратурным измерениям и исследовать их эффективность.

5. Выполнить исследование методов томографии смешанных квантовых состояний света, со статистикой фотонов, подчиняющейся гамма-компаунд распределению Пуассона и его обобщению с учетом иерархической структуры статистических данных. Развить теорию корреляционных функций высокого порядка для состояний с многофотонным отщеплением. Разработать методы, алгоритмы и программы для томографии таких состояний по квадратурным измерениям.

Научная новизна:

1. Разработан и исследован эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний. Предложенная процедура томографии основывается на корневом подходе к оценке состояния и использовании обобщенной информационной матрицы Фишера для оценки точности измерения параметров квантового состояния.
2. Предложен новый метод получения высококачественных протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности, основанный на решении оптимизационной задачи, аналогичной задаче Томсона и задающий протоколы, позволяющие достичь большей точности, чем известные аналоги, при тех же размерах экспериментальной выборки.
3. Предложено теоретическое описание и выполнена обработка экспериментальных данных, связанных с учетом аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах. Проведено исследование явления поляризационного эха, которое является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе.
4. Разработан новый метод, направленный на создание адекватных статистических моделей оптических квантовых состояний с использованием технологии квадратурных измерений. Метод включает в себя приближенную аппроксимацию бесконечномерного квантового состояния в рамках оптимальной редуцированной конечномерной модели.
5. С использованием формализма производящих функций выполнено оригинальное исследование фотонной статистики условных квантовых состояний. Показано, что измерение корреляционных функций высокого порядка сводится к приготовлению и квадратурному измерению услов-

ных оптических состояний, возникающих при отщеплении от исходного пучка заданного числа фотонов. В рамках модели составного компаунд-распределения Пуассона рассмотрена статистика фотонов с учетом их группировки для различных квантовых состояний.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов для более точного экспериментального исследования квантовых бит, логических элементов и их взаимодействия с окружением. Результаты позволяют усовершенствовать контроль качества элементной базы квантовых компьютеров.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний, основанный на корневом подходе, обеспечивает высокую точность реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены.
2. Метод получения протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности, основанный на решении обобщенной задачи Томсона, задаёт протоколы измерений, позволяющие достичь большей точности по сравнению с существующими при равных объемах данных. Обнаружено, что полученное семейство протоколов содержит в себе такие важные наборы, как симметричные информационно полные положительно-значные операторные меры и полные наборы взаимно несмещённых базисов. Показано, что разработанные методы, алгоритмы и программы обеспечивают контроль квантовых состояний с точностью, близкой к фундаментальному пределу, допускаемому квантовой механикой.
3. Метод квантовой томографии, основанный на дополнении состояния Чоя—Ямилковского до чистого состояния и оптимальной оценке ранга квантовой операции, обеспечивает многократное увеличение точности по сравнению с ранее известными стандартными методами. Показано, что разработанные методы и алгоритмы описания квантовых операций с учетом шумов могут быть приложены к обеспечению качества и эффективности квантовых информационных технологий, основанных на поляризационной степени свободы фотонов.
4. Метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных изме-

рений, основанный на корневом подходе и использовании в качестве базиса сдвинутых сжатых фоковских состояний, обладает существенным превосходством по сравнению с ранее известными методами, описанными в литературе.

5. Преобразование квадратурных экспериментальных данных посредством кумулятивных функций распределения позволяет свести задачу проверки адекватности результатов квантовой томографии оптических состояний к проверке гипотезы о приближенной однородности возникающего двумерного массива. Критерий хи-квадрат для оценки однородности преобразованных квадратурных данных служит эффективным средством для разработки адекватных и отбраковки неадекватных моделей.
6. Многоуровневая иерархическая модель компаунд-распределений Пуассона более адекватно отражает экспериментальные данные по сравнению с идеальной одноуровневой теорией при анализе условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния различного числа фотонов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением современных методов квантовой теории, вычислительной математики и математической статистики, использованием численных методов Монте-Карло, а также сравнением полученных результатов с результатами других авторов. Выводы разработанных теоретических подходов хорошо согласуются с результатами численных и реальных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2012» (ICMNE-2012);
- международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2014» (ICMNE-2014);
- 21-ой всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика — 2014»;
- международной конференции «Theoretical Physics and its Applications, 2015»;
- второй российско-белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники: импортозамещение и применение» им. О. В. Лосева;

– международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2016» (ICMNE-2016);

Личный вклад. Результаты диссертационной работы получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии: разработаны методы получения высококачественных протоколов квантовой томографии на основе решения обобщенной оптимизационной задачи Томсона, создано программное обеспечение для численного решения этой задачи, проведен анализ полученных решений; разработан метод томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний; проведен анализ результатов экспериментов по поляризационному эху и искусственной оптической анизотропии; разработан и исследован новый метод, направленный на создание адекватных статистических моделей оптических квантовых состояний с использованием технологии квадратурных измерений; выполнена математическая обработка результатов экспериментов по генерации и измерению тепловых квантовых состояний, а также условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния различного числа фотонов. Автор принимал непосредственное участие в постановке задач и анализе полученных результатов, а также в подготовке публикаций в научных журналах и докладов на тематических конференциях.

Публикации. Результаты опубликованы в 15 печатных работах, в их числе 6 статей удовлетворяющих требованиям ВАК, из них 2 статьи в российских рецензируемых журналах и 4 статьи в иностранных рецензируемых изданиях, 2 главы в монографиях, 7 тезисов докладов на российских и международных научных конференциях.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 138 страниц, включая 39 рисунков и 19 таблиц. Список литературы содержит 166 наименований.

Глава 1. Анализ эффективности протоколов квантовых измерений поляризационных трёхфотонных состояний

В данной главе анализируются различные протоколы восстановления поляризационных состояний трифотонов, обеспечивающие высокую точность в условиях реального эксперимента.

Фундаментальная по своей природе поляризационная степень свободы фотона одновременно является весьма удобным средством для кодирования и передачи квантовой информации. Современная экспериментальная техника позволяет приготавливать, преобразовывать и измерять поляризационные состояния отдельных фотонов и пар коррелированных фотонов (бифотонов) с точностью более 99 % [19—23]. В то же время, манипуляции с большим числом фотонов уже вызывают существенные трудности. Так, на сегодняшний день точность приготовления перепутанных состояний трифотонов не превышает 86 % [24]. Это связано в первую очередь с низкой скоростью генерации таких состояний (как правило, не больше 1 Гц). В настоящей главе мы рассмотрим основные методы приготовления трифотонов и проанализируем различные протоколы восстановления их поляризационного состояния.

1.1 Способы генерации трифотонов

Наиболее естественным способом генерации трифотонов является эффект спонтанного параметрического рассеяния (СПР) третьего порядка, при котором один из фотонов мощного лазерного излучения (накачки) в среде с кубической восприимчивостью $\chi^{(3)}$ может распасться на три фотона. Однако, генерация трифотонов в нелинейных кристаллах имеет очень малую эффективность по сравнению с генерацией бифотонов за счет традиционного СПР второго порядка [25]. Расчеты показывают, что при сходных условиях эффективность генерации трифотонов на 9 порядков ниже, чем генерация бифотонов [26], а скорость генерации не превышает сотых долей Гц. Для увеличения эффективности СПР третьего порядка предлагается использовать оптические волокна [26—31]. Согласно рас-

четам, в этом случае эффективность генерации может достигать нескольких Гц, но экспериментальных подтверждений этого пока не получено.

Есть предложения по генерации трифотонов в процессе каскадных переходов в холодных атомах [32] или квантовых точках [33]. Последнее даже было реализовано и скорость регистрации трифотонов составила 1 Гц, но поляризационное состояние трифотонов не исследовалось.

Пока что экспериментально реализованы лишь источники поляризационных состояний трифотонов на основе СПР второго порядка. В этом процессе при увеличении мощности накачки рождаются не только пары фотонов, но и четверки, шестерки и т. д. За счет постселекции можно отобрать лишь те случаи, когда рождается ровно четыре фотона, один из них используется в качестве триггера, а поляризационное состояние остальных трех фотонов исследуется. Таким образом были получены перепутанные трифотонные состояния [34], причем скорость регистрации трифотонов составляла от 7 до 500 мГц.

Еще один вариант условного приготовления трифотонных состояний основан на интерференции пары фотонов, полученных в процессе СПР с квазиоднофотонным состоянием, полученным за счет ослабления лазерного импульса. В этом случае дополнительный фотон можно добавить в один из каналов как после процесса СПР, так и перед ним, что увеличивает эффективность распада фотона накачки в заданных направлениях. Скорость регистрации трифотонов в первом случае достигала 25 Гц, а во втором — 1,45 Гц [34—39].

Наконец, последний вариант генерации трифотонов основан на последовательном СПР в двух кристаллах, когда один из фотонов, рожденных в первом кристалле служит накачкой для СПР во втором [24; 40; 41]. Скорость регистрации трифотонов в таких схемах составляет десятые доли Гц.

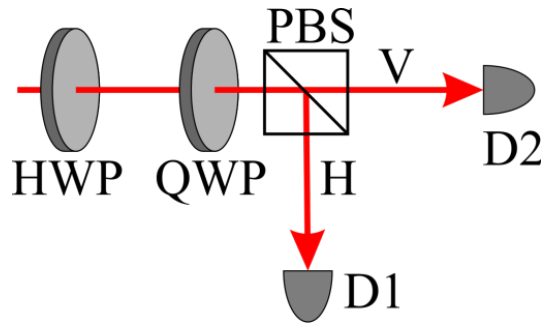
1.2 Поляризационные состояния трифотонов

Среди чистых поляризационных состояний трифотонов можно выделить два класса перепутанных состояний [42], которые могут быть представлены GHZ-состоянием $1/\sqrt{2}(|HHH\rangle + |VVV\rangle)$ [43] и W-состоянием $1/\sqrt{3}(|HHV\rangle + |HVN\rangle + |VHH\rangle)$ [44]. Первое является максимально перепутанным, т. к. максимально нарушает неравенства Белла, однако при детекти-

ровании одного из фотонов состояние остальных фотонов становится факторизуемым. Второе не является максимально перепутанным, но при регистрации одного из фотонов в $2/3$ случаев остальные остаются перепутанными. Оба эти состояния неоднократно реализовывались и измерялись в различных экспериментах [24; 34—39]. При этом измеренные значения фиделити находились в диапазоне $F = 0.68 \div 0.86$, значения видности интерференционной картины $V = 0.70 \div 0.86$, а значения чистоты (purity) $P = 0.77 \div 0.88$. Общее количество зарегистрированных фотонов составляло от нескольких сотен до 30 тысяч.

Стоит также отметить, что во всех экспериментах трифотонны были разделены на три отдельных канала. В этом случае, все три фотона различимы (невыврожденный случай) и их квантовое состояние описывается вектором в 8-мерном редуцированном гильбертовом пространстве.

В то же время, в случае генерации трифотоннов за счет эффекта СПР третьего порядка, все три фотона могут принадлежать к одной пространственной и одной частотной моде (вырожденный случай). Тогда такие состояния как например $|HHV\rangle, |HVN\rangle$ и $|VHN\rangle$ будут неразличимы (в представлении чисел заполнения это состояние $|1_V, 2_H\rangle$), и квантовое состояние будет описываться вектором в пространстве размерности 4. Такие состояния можно описывать как трехфотонные поляризационные кукварты [45].



HWP и QWP — полуволновая и четвертьволновая фазовые пластинки, PBS — поляризационный светоделитель, D1 и D2 — однофотонные детекторы.

Рисунок 1.1 — Схема экспериментальной установки для томографии одного кубита

1.3 Протокол квантовых измерений и точность восстановления квантовых состояний

Согласно принципу дополнительности Нильса Бора [46], различные проекционные измерения образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений. Рассматриваемая совокупность образует протокол квантовых измерений [18; 47—53].

$$M_j = X_{jl}c_l, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.1)$$

здесь c_l , $l = 0, 2, \dots, s-1$ — компоненты вектора состояния в гильбертовом пространстве, M_j — амплитуда вероятности j -ой квантовой проекции, X_{jl} — элементы так называемой аппаратной матрицы протокола. В формуле (1.1) предполагается суммирование по индексу l . Протокол описывает m различных проекций квантового состояния. Интенсивности генерации событий λ_j задаются квадратами модулей амплитуд:

$$\lambda_j = |M_j|^2.$$

Соответствующий оператор интенсивности квантового процесса [20; 21] есть

$$\Lambda_j = X_j^+ X_j.$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти вектор состояния c , который бы обеспечивал максимум так называемой функции правдоподобия. В рассматриваемом случае функция правдоподобия задается произведением пуассоновских вероятностей $P(k_j) = \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j)$ по всем строкам протокола. Здесь k_j — регистрируемое число событий в эксперименте, t_j — время экспозиции j -ой строки протокола. В этих обозначениях функция правдоподобия имеет вид:

$$L = \prod_{j=1}^m \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j).$$

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению правдоподобия [54]:

$$Ic = Jc.$$

Здесь I и J — матрицы размерности $s \times s$ следующего вида:

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j, \quad J = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{\lambda_j} \Lambda_j.$$

Рассматриваемые уравнения допускает эффективную, быстро сходящуюся итерационную процедуру.

Описанный выше метод реконструкции чистых состояний непосредственно обобщается на произвольные смешанные состояния. В этом случае вектор-столбец c длины s заменяется на матрицу c размерности $s \cdot r$, где r — оцениваемое число компонентов в смеси, задающее ранг смешанного состояния (число ненулевых собственных значений матрицы плотности). Случай $r = 1$ отвечает чистому состоянию, а случай $r = s$ — смеси полного ранга. Матрица c есть очищенная амплитуда состояния, матрица плотности есть $\rho = cc^\dagger$.

Отличие реконструированного вектора состояния от точного можно характеризовать как проявление статистических флуктуаций, связанных с фундаментальной вероятностной природой квантовой механики. Инструментом для количественного описания уровня таких флуктуаций дает матрица полной информации, введенная в работах [50; 51]. Ее можно записать следующим образом:

$$H = 2 \sum_j \frac{t_j (\Lambda_j c) (\Lambda_j c)^\dagger}{\lambda_j}.$$

Матрица H есть действительная симметричная матрица размерности $2rs \cdot 2rs$. Она служит мерой информации о параметрах квантового состояния, которая содержится в измерениях, выполненных в соответствии с заданным протоколом квантовых измерений.

Будем описывать томографически полные протоколы, т.е. такие протоколы, которые способны обеспечить сколь угодно точное восстановление произвольного смешанного состояния при достаточно большом объеме выборки [50].

В случае полного протокола матрица H имеет $\nu_H = (2s - r)r$ ненулевых строго положительных собственных значений, а остальные r^2 собственных значений точно равны нулю. На основе матрицы информации можно показать, что потеря точности есть случайная величина [48; 49; 54; 55], представление которой есть: $1 - F = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \xi_j^2$, где $d_j \geq 0$ — неотрицательные коэффициенты, $\xi_j(0,1)$, $j = 1, \dots, \nu$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $\nu = \nu_H - 1 = (2s - r)r - 1$ — число степеней свободы квантового состояния. В частности, $\nu = 2s - 2$ для чистых состояний, для которых $r = 1$, и $\nu = s^2 - 1$ для смешанных состояний полного ранга, для которых $r = s$.

Вероятность совпадения реконструированного и теоретического состояний (Fidelity) дается следующей формулой для чистых состояний $F = |\langle c_{rec} | c_{theor} \rangle|^2$.

Аналогичная более общая формула для смешанных состояний имеет вид: $F = |Tr(\sqrt{\sqrt{\rho_{theor}}\rho_{rec}\sqrt{\rho_{theor}}})|^2$, где ρ_{theor} — теоретическая матрица плотности, ρ_{rec} — реконструированная матрица плотности. Алгоритм расчета коэффициентов d_j $j = 1, \dots, \nu$ изложен в [54].

1.4 Томография невырожденных трифотонных состояний

Типичная экспериментальная установка не позволяет производить проекционные измерения на запутанные состояния, поэтому будем рассматривать протоколы, состоящие из проекций на сепарабельные состояния. Удобнее всего создавать такие протоколы как произведения протоколов томографии состояний одного кубита.

В этом случае в каждом оптическом канале устанавливается пара фазовых пластинок (четверть-волновая HWP и полу-волновая QWP), которые осуществляют заданное поляризационное преобразование, поляризационный светоделитель PBS и пара детекторов D1 и D2 (рисунок 1.1).

В основу однокубитовых протоколов можно положить правильные многогранники, а также многогранники, обладающие высокой симметрией [48; 56]. Правильные многогранники используются для обеспечения наиболее симметричного и равномерного распределения состояний на сфере Блоха. Состояния, которые задают проекционные квантовые измерения, определяются направлениями из центра сферы Блоха к центрам граней многогранников. Таким образом, число граней многогранника определяет число строк однокубитового протокола квантовых измерений. В качестве логического нуля кубита выберем состояние $|V\rangle$, а качестве логической единицы — состояние $|H\rangle$: $|0\rangle = |V\rangle$, $|1\rangle = |H\rangle$.

Рассматриваемые многокубитовые протоколы томографии невырожденных состояний образованы проекционными квантовыми измерениями на состояния, которые являются тензорными произведениями рассматриваемых однокубитовых состояний. Если однокубитовый протокол образован многогранником с m гранями и, соответственно, имеет m строк, то соответствующий ему l — кубитовый протокол будет иметь m^l строк.

1.4.1 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим восстановление трифотонного GHZ-состояния: $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HHH\rangle + |VVV\rangle)$, объем выборки $n = 10^5$. На рисунке 1.2 представлено распределение числа девяток в вероятности совпадения фиделити F для протоколов на основе тетраэдра, куба и октаэдра.

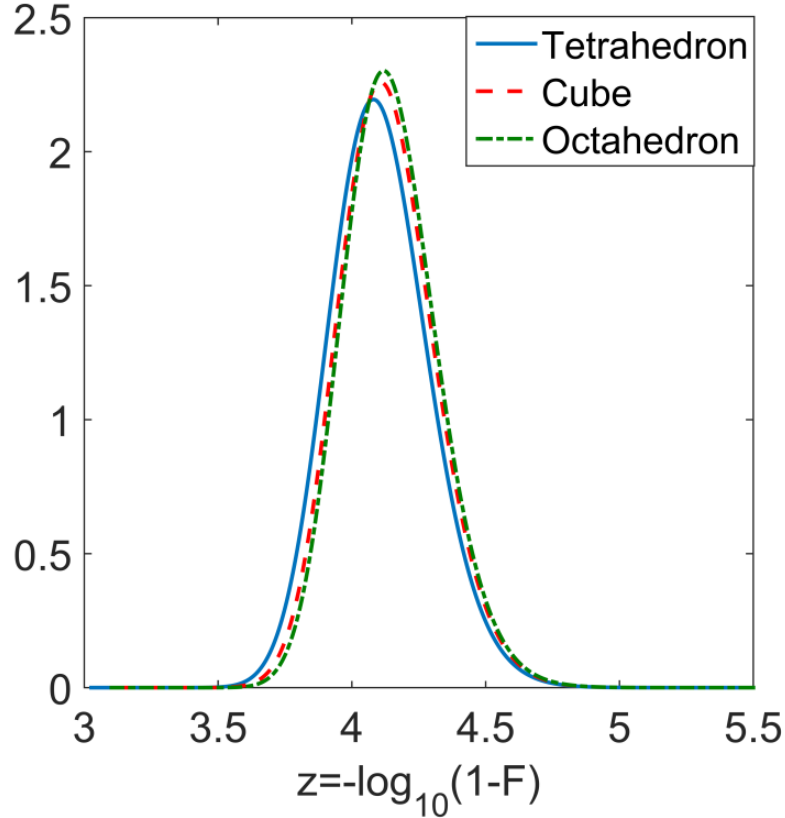


Рисунок 1.2 — Распределение числа девяток в вероятности совпадения фиделити для разных протоколов

Как можно видеть из рисунка, точность восстановления квантового состояния лучше при использовании протокола на основе октаэдра. Это соответствует тому, что октаэдр покрывает сферу Блоха лучше, чем куб или тетраэдр. При использовании многогранников с большим количеством граней точность восстановления будет расти. Среднее значение фиделити, даваемое теорией точности для протокола на основе тетраэдра равно 99.893 %, куба — 99.9005 %, октаэдра — 99.9035 %.

Рассмотрим величину $L = n \langle 1 - F \rangle$, которая представляет собой так называемую функцию потерь. Она является функцией квантового состояния и характеризует асимптотические свойства протокола измерений. Можно показать [18;

57], что минимально возможные потери для чистых состояний определяются как:

$$L_{\min} = s - 1. \quad (1.2)$$

Для трифотонных состояний $L_{\min} = 7$. Численные эксперименты показывают, что минимально возможные потери $L_{\min}$ определяются теоретически найденным пределом (1.2). Верхняя граница $L_{\max}$ представляет собой результат численной оптимизации. Значение максимально возможных потерь $L_{\max}$ и потерь L_{GHZ} (GHZ-состояние) для протокола на основе тетраэдра ≈ 10.4 и 8.63 , куба ≈ 8.2 и 7.96 , октаэдра ≈ 7.9 и 7.73 .

Рассмотрим сравнение теоретического распределения точности с данными численных экспериментов. Исследуем для примера восстановление чистого GHZ-состояния с использованием протокола на основе тетраэдра. На рисунке 1.3а показано распределение числа девяток в вероятности совпадения фиделити для объема выборки $n = 10^5$: кривая — теоретическое распределение потерь точности, гистограмма — результаты 200 численных экспериментов.

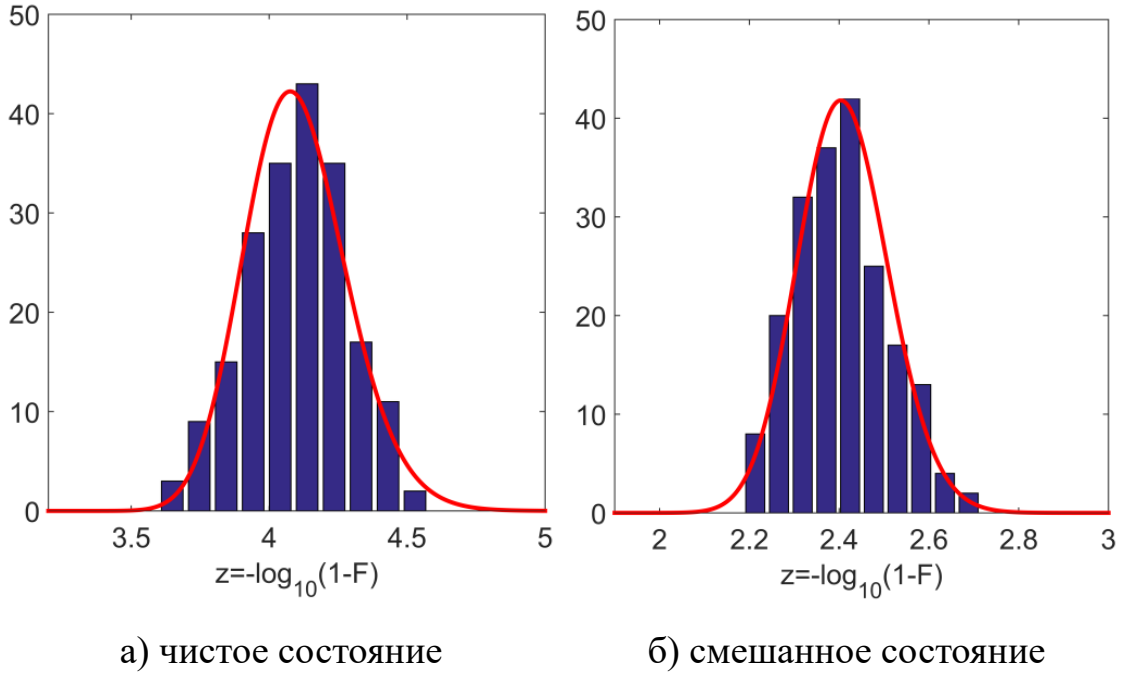


Рисунок 1.3 — Распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити)

Как видно, теория и численные расчеты хорошо согласуются. Среднее значение фиделити $\langle F \rangle$ составляет 99.991 % (четыре девятки после запятой). Если восстанавливать чистое состояние как абсолютно смешанное, то $\langle F \rangle$ будет равно 99.278 % (две девятки). Таким образом, при использовании неадекватной модели, потери точности вырастают в $\frac{1-0.99278}{1-0.99991} \approx 80$ раз.

Рассмотрим теперь восстановление трехфотонного состояния, представляющего собой смесь GHZ-состояния и однородной матрицы плотности:

$$\rho = f \frac{I}{s} + (1 - f) |GHZ\rangle \langle GHZ|, \quad (1.3)$$

где, I — единичная матрица размерности $8 \cdot 8$, f — вес состояния, задаваемого однородной матрицей плотности. В нашем примере $f = 0.5$. Объем выборки составил $n = 10^5$, выполнено 200 численных экспериментов, протокол на основе тетраэдра. Результаты реконструкции представлены на рисунке 1.3б.

Среднее значение фиделити составило $\langle F \rangle = 99.596\%$. Более низкое значение фиделити связано с тем, что в данном случае необходимо оценивать $s^2 - 1 = 63$ параметра смешанного состояния, в отличие от $2s - 2 = 14$ параметров чистого состояния.

1.5 Томография вырожденных трифотонных состояний

В случае томографии вырожденного трифотонного состояния, согласно схеме на рисунке 1.1, квантовые состояния, соответствующие перестановкам фотонов, будут неразличимы. Для описания таких трифотонов удобно выбрать следующий редуцированный базис из четырёх векторов:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |3_V\rangle = |000\rangle = |VVV\rangle \\ |\psi_1\rangle &= |2_V, 1_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}} (|VVH\rangle + |VHV\rangle + |HVV\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= |1_V, 2_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}} (|VHH\rangle + |HVN\rangle + |HHV\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= |3_H\rangle = |111\rangle = |HHH\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

Всевозможные суперпозиции состояний (1.4) могут быть названы трёхфотонным поляризационным куквартом (three-photon polarization ququarts) [45].

Векторы-столбцы четырех введенных состояний образуют матрицу G , которая обеспечивает переход от редуцированного четырехмерного базиса к исходному восьми-мерному:

$$c_{4d} = G^\dagger \tilde{c}_{8d}$$

Здесь c_{8d} — вектор-столбец длины 8, c_{4d} — вектор-столбец длины 4.

Сама матрица G размерности $8 \cdot 4$, очевидно, имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Введенная матрица G обеспечивает переход от исходной аппаратной матрицы X_{8d} размерности $m \cdot 8$ к редуцированной аппаратной матрице X_{4d} размерности $m \cdot 4$:

$$X_{4d} = X_{8d}G$$

В новом базисе уравнение (1.1) будет иметь вид:

$$M_j^{4d} = \tilde{X}_{jl}^{4d} \tilde{c}_l^{4d}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

Решение задачи реконструкции в редуцированном базисе совершенно аналогично решению в исходном базисе, но предполагает оценку меньшего числа параметров. Можно ожидать, что точность реконструкции будет выше. Это подтверждают результаты численного исследования.

На рисунке 1.4а показано распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити) для случая четырехмерного пространства при реконструкции чистого GHZ-состояния. Объем выборки $n = 10^5$: кривая — теоретическое распределение потерь точности, гистограмма — результаты 200 численных экспериментов.

Рассматривался протокол на основе тетраэдра. Среднее значение фиделити составляет 99.996 %. Если восстанавливать чистое состояние как абсолютно смешанное, то $\langle F \rangle$ будет равно 99.669 %. В данном случае потери точности вырастают в 83 раза.

Результаты восстановления смеси (1.3) в четырехмерном пространстве для объема выборки $n = 10^5$ и 200 численных экспериментов и протокола на основе тетраэдра показаны на рисунке 1.4б.

Среднее значение фиделити составило 99.956 %. При переходе из восьми-мерного в четырехмерное пространство потери точности уменьшаются в 9 раз.

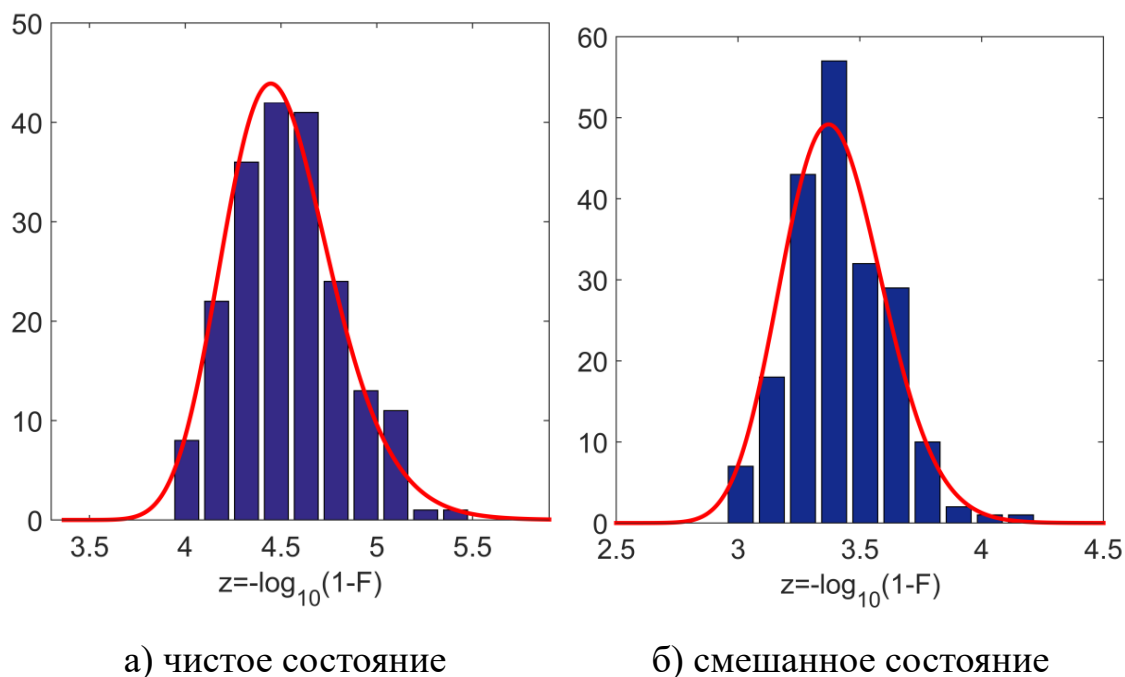


Рисунок 1.4 — Распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити) при томографии в четырехмерном пространстве

Методы, алгоритмы и программы, разработанные в рамках настоящей работы, были применены нами к анализу экспериментов, выполненных другими авторами. Основываясь на развитом подходе, мы проанализировали протоколы, которые использовались в работах [24; 58] для реконструкции GHZ — состояний. В обоих случаях точность восстановления, которая могла бы быть в принципе достигнута, составила величину более 99,99 %. Однако, исследования авторов дали весьма низкие значения фиделити соответственно 86 % и 82 %. Можно сделать вывод, что в рассматриваемых исследованиях были существенные погрешности во время генерации, измерения и обработки экспериментальных данных, которые не позволили пока существенно приблизиться к фундаментальному уровню точности квантовых измерений, определяемому законами квантовой механики.

1.6 Выводы по главе

В настоящей главе разработан и исследован эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний. Предложенная процедура томографии основывается на корневом

подходе к оценке состояния и использовании обобщенной информационной матрицы Фишера для оценки точности измерения параметров квантового состояния.

Выполнен анализ различных протоколов квантовых измерений, которые обладают высокой точностью реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных сильно ограничены.

Показано, что разработанные методы, алгоритмы и программы, основанные на корневом подходе и оптимальной оценке ранга квантового состояния, обеспечивает многократное увеличение точности реконструкции по сравнению с ранее известными стандартными методами.

Разработанный подход весьма актуален для квантовых измерений многофотонных состояний, когда интенсивность генерации многочастичных совпадений весьма низка по своей природе.

Разработанные методы, алгоритмы и программы дают основу для создания новых процедур измерения многочастичных состояний, которые позволят существенно приблизиться к фундаментальному уровню точности квантовых измерений, определяемому законами квантовой механики.

Рассмотрен случай томографии вырожденного трифотонного состояния, когда квантовые состояния, соответствующие перестановкам фотонов, неразличимы. Разработана процедура квантовой томографии, которая обеспечивает переход от исходного восьмимерного гильбертова пространства к редуцированному четырехмерному пространству. Продемонстрировано существенное улучшение точности томографии в вырожденном трифотонном базисе, как для чистых, так и для смешанных состояний.

Результаты главы представлены в публикациях [59; 60].

Глава 2. Оптимизация протоколов томографии квантовых состояний

В настоящее время известно несколько наборов состояний, задающих высококачественные протоколы квантовой томографии. Наиболее широко используемыми среди этих наборов являются симметричные, информационно полные (SIC) POVM [61; 62] и взаимно несмещенные базисы [63; 64]. Известно, что полные наборы взаимно несмещенных базисов существуют в пространствах, размерность которых равняется степени простого числа [64; 65]. В то же время существование этих наборов в пространствах любой размерности до сих пор не доказано. Согласно результатам современных численных экспериментов, полный набор взаимно несмещенных базисов с высокой вероятностью отсутствует уже в пространстве размерности шесть — пространстве с наименьшей размерностью, которая не является степенью простого числа. Гипотеза о существовании SIC-POVM в комплексных пространствах всех размерностей, также не доказана [66—68]. Таким образом, нет гарантии, что эти оптимальные наборы состояний существуют и могут быть использованы при исследовании квантовых систем всех размерностей.

С другой стороны, методы вычисления рассматриваемых наборов состояний основаны на их симметрии и комбинаторной структуре [63; 69], что обуславливает их эффективность, но в то же время значит, что эти методы нельзя применить для получения протоколов квантовой томографии с произвольным числом направлений проекции. В связи с этим, необходим более общий метод построения протоколов квантовой томографии, использующих произвольное число направлений проекции.

В настоящей главе рассматривается семейство протоколов квантовой томографии в пространствах размерностей $2 \div 6$, полученное в результате численного решения задачи математической оптимизации. Постановка задачи и описание использованных методов ее решения приведены в разделе 2.1. Свойства полученных решений рассматриваются в разделе 2.2. Наиболее интересным из них, на наш взгляд, является тот факт, что, во всех рассмотренных случаях с соответствующими числами направлений проекции, решения поставленной задачи совпадают с полными наборами взаимно несмещенных базисов и минимальными информационно полными наборами. Более того, некоторые из решений с другими числами направлений проекции задают POVM с высокой степенью симметрии. Структура полученных наборов состояний описана в 2.2.1. В разделе 2.3 приве-

дены результаты исследования точности полученных протоколов квантовой томографии.

2.1 Построение протоколов квантовой томографии с помощью численной оптимизации

Пусть мы производим томографию неизвестного квантового состояния. Если нет возможности менять протокол во время эксперимента, то естественным требованием является максимальная независимость точности реконструкции от реконструируемого состояния. Для того чтобы достичь этой цели, мы попытаемся распределить наши проекции как можно более равномерно по пространству всех квантовых состояний. Эта задача имеет много общего с рядом задач равномерного распределения точек по сфере. Одной из этого класса задач является классическая задача Томсона [70], которая заключается в нахождении равновесной конфигурации электростатически взаимодействующих электронов на сфере. Поскольку решения рассматриваемой задачи, а также более общей ее формы — задачи Фекете [70; 71], задают наборы точек, которые равномерно покрывают поверхность сферы в трехмерном пространстве, мы решили исследовать свойства решений аналогичной задачи для квантовых состояний.

Каждое из направлений проекции в протоколе измерений квантовой системы размерности s задается вектором в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^s$, который соответствует квантовому состоянию, на которое производится проекция. Введем аналогичную потенциальной энергии целевую функцию для набора m векторов $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\}$ задающего протокол, по аналогии с задачей Фекете:

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(\psi_i, \psi_j)^{-p} & \text{при } p > 0 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq m} \log [d(\psi_i, \psi_j)^{-1}] & \text{при } p = 0, \end{cases}$$

где $d(\psi_i, \psi_j)$ — функция, соответствующая расстоянию между состояниями $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_j\rangle$, а суммирование идет по всем парам векторов.

Такая формулировка задает широкое семейство задач. Цель нашей процедуры оптимизации — найти конфигурацию состояний, минимизирующую потенциальную энергию взаимодействия между ними. Мы можем выбирать как раз-

личные величины p , задающие степенную зависимость силы взаимодействия от расстояния между состояниями, так и различные функции расстояния $d(\psi_i, \psi_j)$.

Далее мы подробно исследуем решения рассматриваемой задачи со степенью $p = 0$ и функцией расстояния $d(\psi_i, \psi_j) = 1 - |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2$. Эта функция является симметричной и равна нулю тогда и только тогда, когда векторы $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_j\rangle$ совпадают, но неравенство треугольника для нее не выполняется. Выбор данной функции был обусловлен главным образом тем, что значения градиента целевой функции в этом случае можно легко вычислить аналитически, что значительно облегчает процедуру оптимизации.

Заметим, что значения рассматриваемой целевой функции зависят только от взаимного положения векторов. Кроме того, нас интересуют решения только среди наборов векторов единичной нормы. Таким образом, на самом деле мы имеем дело с процедурой оптимизации наборов векторов в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{s-1}$. Благодаря этому мы можем перейти к более простой безусловной процедуре оптимизации. Для этого будем представлять наши состояния в сферических координатах:

$$|\psi\rangle = [\cos(\theta_1), \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \exp(i\varphi_2), \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \exp(i\varphi_3), \dots].$$

Решения были получены с помощью алгоритмов global search и multi-start из MATLAB global optimisation toolbox. Был использован метод последовательного квадратичного программирования с методом сопряженных градиентов. Поскольку поиск производился в стандартной double precision арифметике с плавающей запятой с координатной точностью равной корню из машинной эпсилон $\sqrt{\epsilon_{\text{binary64}}} = 2^{-26} = 1.49 \times 10^{-8}$, его результаты можно улучшить в дальнейшем, перейдя к более точным вычислительным средствам.

2.2 Свойства решений

Прежде всего, опишем свойства полученных наборов векторов в комплексном проективном пространстве единичной размерности. Лучи этого пространства задают волновые функции двухуровневой квантовой системы.

Благодаря изоморфизму между комплексной проективной линией и поверхностью сферы Блоха, мы можем исследовать свойства решений, построив их аналоги в трехмерном евклидовом пространстве.

Получившиеся наборы векторов в $\mathbb{R}^3$ почти полностью совпадают с решениями задачи Томсона [72]. Среди наборов, для которых мы получили решения, значительные отклонения наблюдаются в двух случаях. Первое отличие заключается в том, что в отличие от наборов Томсона, все найденные нами решения в $\mathbb{R}^3$ имеют нулевую векторную сумму. При этом симметрии решений совпадают даже в тех случаях, когда векторные суммы отличаются. Нами был найден единственный случай, в котором симметрия решений не совпадает. Это имеет место в наборе из 29 векторов, который имеет симметрию C_2 .

Таблица 1 — Значения потенциальной энергии и симметрия для конфигураций, эквивалентных решениям задачи в $\mathbb{CP}^1$.

m	E	Симметрия
4	3.67423	T_d
5	6.47469	D_{3h}
6	9.98528	O_h
7	14.45298	D_{5h}
8	19.67567	D_{4d}
9	25.75999	D_{3h}
10	32.71706	D_{4d}
11	40.59703	C_{2v}
12	49.16525	I_h
13	58.85336	C_{2v}
14	69.30733	D_{6d}
15	80.67082	D_3
16	92.91253	T
17	106.05069	D_{5h}
18	120.08471	D_{4d}
19	135.09064	C_{2v}
20	150.88233	D_{3h}
21	167.64179	C_{2v}
22	185.28813	T_d
23	203.93145	D_3
24	223.34776	O
25	243.81358	C_s
26	265.13432	C_2
27	287.30291	D_{5h}
28	310.49202	T
29	334.63634	C_2
30	359.60515	D_2
31	385.53155	C_{3v}
32	412.26127	I_h
72	2255.00237	I

Для того чтобы наглядно показать наши наборы в сравнении с решениями задачи Томсона, в таблице 1 мы привели значения потенциальной энергии и

симметрию наборов в нотации Шенфлиса. Значения для набора из 29 векторов выделены.

2.2.1 Структура решений

Наибольший интерес представляют наборы состояний, образующие POVM. Positive-operator valued measure (POVM) — это мера, элементами которой являются положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Поскольку мы рассматриваем протоколы, задаваемые наборами векторов $\{|\psi_i\rangle\}$ единичной нормы в гильбертовых пространствах размерности m , POVM задаются наборами квантовых проекционных измерений $\{F_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}$, сумма которых пропорциональна единичному оператору:

$$\sum_{i=1}^m F_i \propto I_H$$

Интересное свойство решений заключается в том, что в то время как все полученные наборы векторов задают POVM в пространстве $\mathbb{C}^2$, этого не наблюдается в пространствах больших размерностей. Более того, все наборы, образующие POVM, обладают одинаковой структурой. Каждый из них можно разделить на подмножества таким образом, что углы между всеми векторами, принадлежащими одному подмножеству равны. При этом углы между любыми двумя векторами из разных подмножеств также равны. Таким образом, эти наборы состояний обладают свойствами как SIC-POVM [61], так и полных наборов взаимно несмещенных базисов. Оба эти семейства также являются решениями нашей оптимизационной задачи.

Числа векторов, для которых полученные решения образуют POVM, представлены в таблице 2. Их структура — в таблице 3. Центральные столбцы соответствуют подмножествам, на которые можно поделить протокол. В каждом из них указано число таких подмножеств, количество векторов в подмножестве и значение вероятности совпадения между векторами. Значения вероятности совпадения для векторов из разных подмножеств приведены в последнем столбце.

Таблица 2 — POVM наборы в $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}^4$, $\mathbb{C}^5$ и $\mathbb{C}^6$.

s	m
3	9,10,11,12
4	16,18,19,20
5	25,29,30
6	36

Таблица 3 — Подмножества POVM решений.

	первое семейство			второе семейство			$ \langle \psi_k \psi_l \rangle ^2$
	n_{ss}	размер	$ \langle \psi_i \psi_j \rangle ^2$	n_{ss}	размер	$ \langle \psi_i \psi_j \rangle ^2$	
10 векторов в $\mathbb{C}^2$	1	6	1/5	1	4	1/9	1/3
11 векторов в $\mathbb{C}^3$	2	4	1/9	1	3	0	1/3
18 векторов в $\mathbb{C}^4$	2	7	1/8	1	4	0	1/4
19 векторов в $\mathbb{C}^4$	3	5	1/16	1	4	0	1/4
29 векторов в $\mathbb{C}^5$	4	6	1/25	1	5	0	1/5

2.3 Потери точности при томографии методом максимального правдоподобия

Цель оптимизации заключалась в как можно более равномерном распределении проекторов, поэтому полученные протоколы могут быть весьма полезными для томографии квантовых состояний. Чтобы проверить этот факт, мы произвели вычисления максимальных потерь точности при реконструкции чистых состояний [53; 57].

Оказывается, что потери точности при реконструкции подчиняются обобщенному хи-квадрат распределению. Качество томографического протокола удобно представлять с помощью функции потерь

$$L = n \left\langle 1 - |\langle c_0 | c \rangle|^2 \right\rangle,$$

где $|c_0\rangle$ и $|c\rangle$ — истинный и реконструированный векторы состояния, соответственно. Множитель n равен среднему размеру выборки и введен для того, чтобы скомпенсировать обратную зависимость средних потерь от него. Рассматриваемой функцией удобно пользоваться для сравнения различных протоколов кван-

товой томографии. Для этого можно аппроксимировать значения этой функции для всех возможных реконструируемых квантовых состояний. Заметим, что эта процедура требовательна к вычислительным ресурсам, в связи с чем мы приводим полные распределения потерь точности только для пространства $\mathbb{C}^2$. Примеры полученных распределений функции потерь по сфере Блоха представлены на рисунках 2.1–2.4. Мы указываем наибольшие значения функции потерь для всех полученных протоколов в таблице 4. Для сравнения в ней также представлены максимальные значения потерь точности для протоколов, построенных на основе многогранников [73]. Случаи, в которых максимальные потери отличаются, выделены. Заметим, что протоколы, полученные в результате рассматриваемой процедуры оптимизации, обладают максимальными потерями, не превышающими значения соответствующих протоколов, основанных на многогранниках.

2.4 Выводы по главе

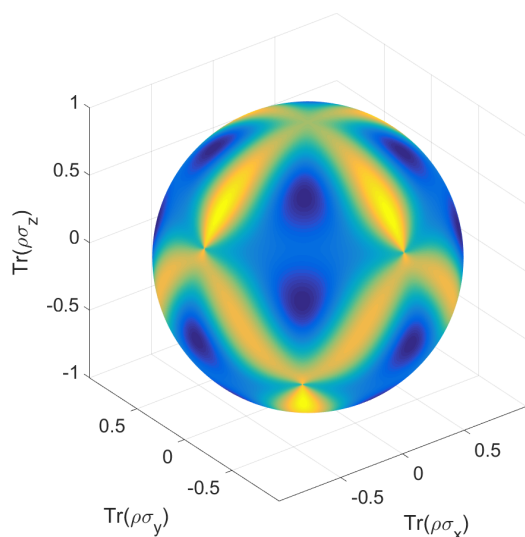
В настоящей главе разработан новый метод получения высококачественных протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности.

Рассмотренные протоколы основаны на решении оптимизационной задачи, аналогичной задаче Томсона. Показано, что полученное семейство протоколов содержит в себе такие важные наборы, как симметричные информационно полные положительные операторо-значные меры и полные наборы взаимно несмещённых базисов.

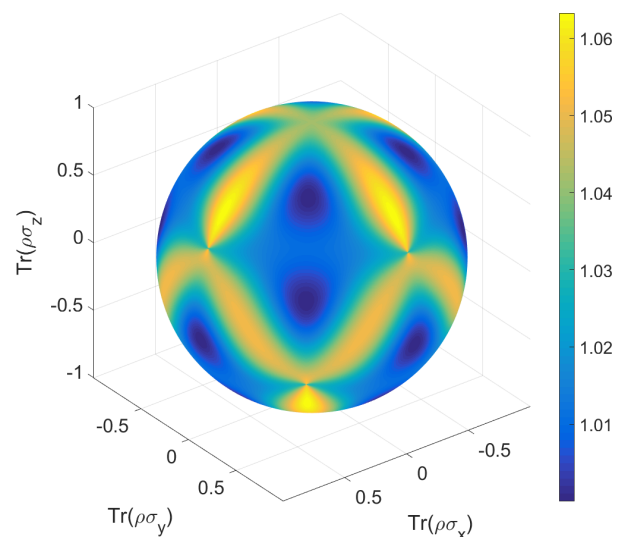
Однокубитовые квантовые протоколы, полученные в результате рассматриваемой процедуры оптимизации, обладают максимальными потерями точности, не превышающими значений для соответствующих протоколов, основанных на правильных и полуправильных многогранниках. Для протоколов на основе восьми и двадцати проекторов полученные максимальные потери точности оказались ниже, чем соответствующие аналогичные значения потерь для октаэдра и икосаэдра, что говорит о более высоком качестве новых протоколов.

Разработанные методы обеспечивают контроль квантовых состояний с точностью, близкой к фундаментальному пределу, допускаемому квантовой механикой.

Результаты главы представлены в публикациях [56; 74—76].

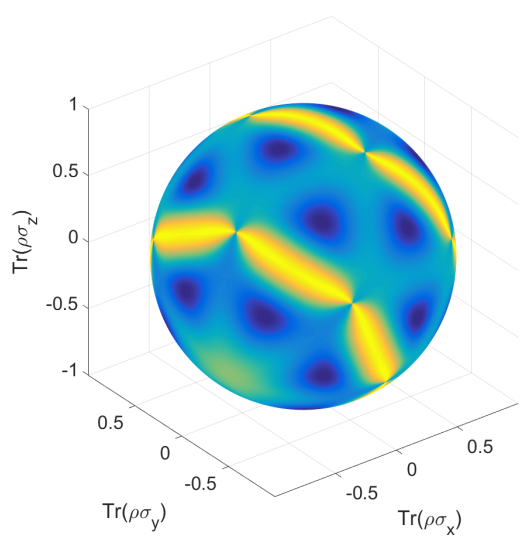


а) Вид спереди

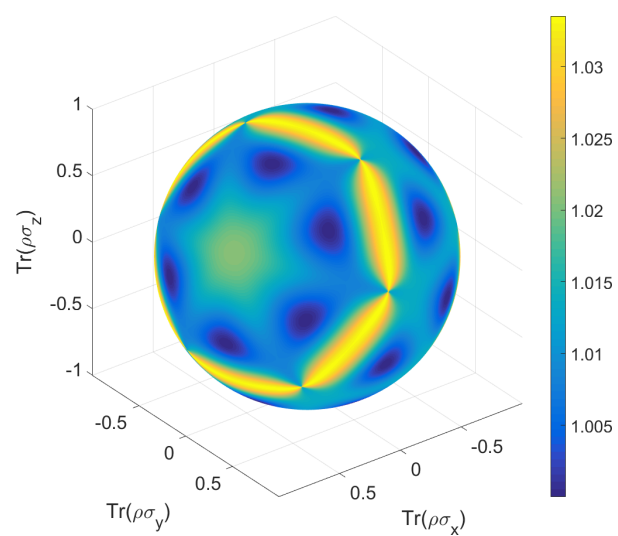


б) Вид сзади

Рисунок 2.1 — Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 10$ состояний.



а) Вид спереди

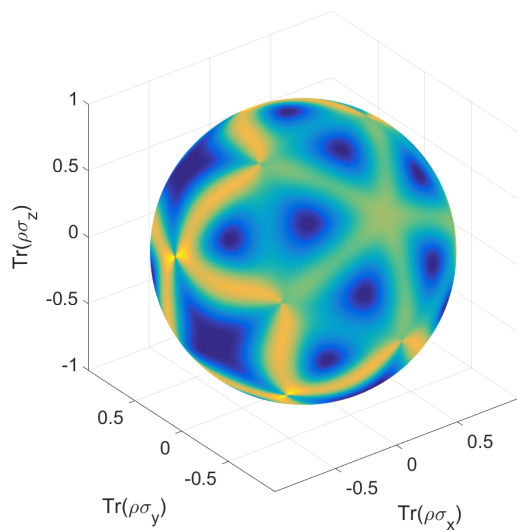


б) Вид сзади

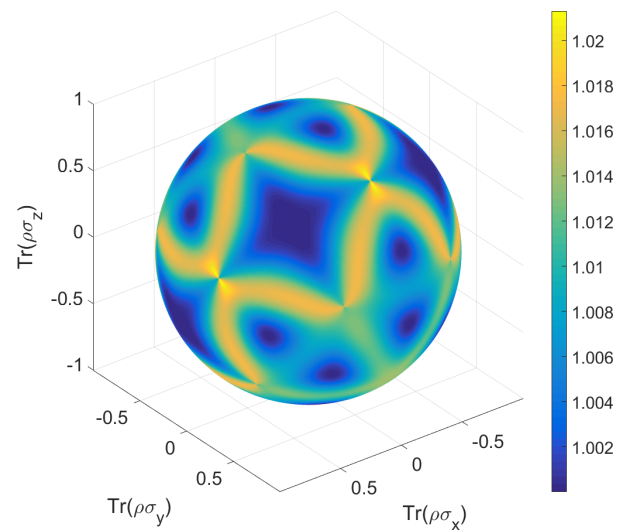
Рисунок 2.2 — Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 14$ состояний.

Таблица 4 — Максимальные значения функции потерь L и квадраты максимальных кросс корреляций $c_{\max} = \max_{i \neq j} |\langle x_i, x_j \rangle|$ между состояниями

s	m	$c_{\max}^2$	$L_{\max}$	$L_{\max}^{\text{poly}}$	s	m	$c_{\max}^2$	$L_{\max}$	$L_{\max}^{\text{poly}}$
2	4	0.33333	1.50000	1.50000	3	14	0.46982	2.87231	
2	5	0.50000	1.56237		3	15	0.47057	2.52589	
2	6	0.50000	1.12500	1.12500	3	16	0.48642	2.47132	
2	7	0.65451	1.22500		3	17	0.49403	2.49637	
2	8	0.65940	1.11167	1.12500	3	18	0.46829	2.26890	
2	9	0.67777	1.08527		3	19	0.46683	2.24163	
2	10	0.71024	1.06327		3	20	0.52819	2.22581	
2	11	0.76413	1.08738		3	21	0.52971	2.27031	
2	12	0.72361	1.02857	1.02857	3	22	0.55223	2.23096	
2	13	0.80522	1.05270		3	23	0.55163	2.23774	
2	14	0.80270	1.03351		3	24	0.55938	2.17851	
2	15	0.82804	1.03673		3	25	0.60096	2.20353	
2	16	0.82785	1.02580		3	26	0.60496	2.23393	
2	17	0.82125	1.02130		3	27	0.58794	2.16280	
2	18	0.83772	1.01868		3	28	0.59228	2.16861	
2	19	0.85630	1.02033		3	29	0.62992	2.15629	
2	20	0.84902	1.01524	1.02273	3	30	0.60077	2.15500	
2	21	0.85748	1.01453		4	16	0.20000	4.09911	4.44297
2	22	0.86470	1.01159		4	17	0.27398	4.17969	
2	23	0.87487	1.01420		4	18	0.25000	4.07735	
2	24	0.87193	1.00834		4	19	0.25000	3.96333	
2	25	0.88647	1.01022		4	20	0.25000	3.64583	
2	26	0.89072	1.01031		5	25	0.16667	5.39593	
2	27	0.88380	1.00787		5	26	0.20928	5.45994	
2	28	0.89539	1.00733		5	27	0.26635	5.41101	
2	29	0.90445	1.00809		5	28	0.24951	5.34019	
2	30	0.90027	1.00635		5	29	0.20000	5.19002	
2	31	0.90287	1.00751		5	30	0.20000	4.89244	
2	32	0.89733	1.00429	1.00429	6	36	0.14286	6.69035	
2	72	0.95488	1.00094		6	37	0.30021	6.79332	
3	9	0.25000	2.80000		6	38	0.26908	6.76887	
3	10	0.33333	2.84888		6	39	0.23915	6.68921	
3	11	0.33333	2.76091		6	40	0.24873	6.60680	
3	12	0.33333	2.42424		6	41	0.26700	6.33471	
3	13	0.41801	2.66608		6	42	0.25586	6.31007	

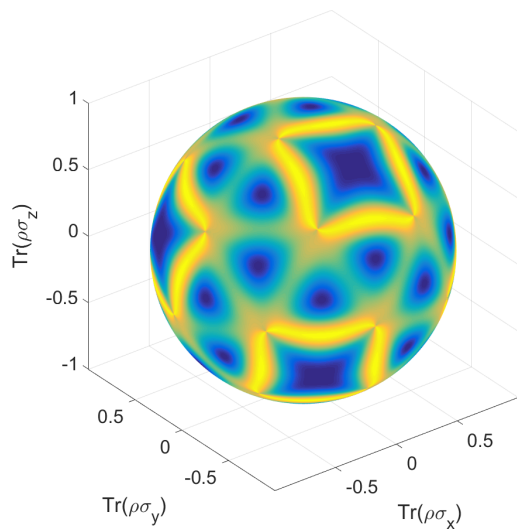


а) Вид спереди

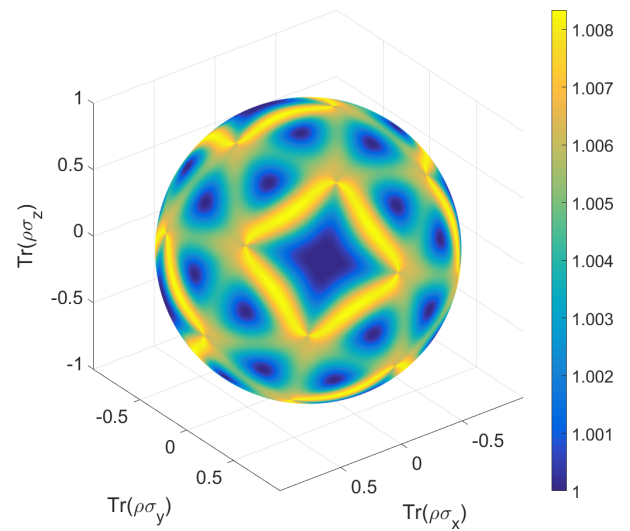


б) Вид сзади

Рисунок 2.3 — Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 17$ состояний.



а) Вид спереди



б) Вид сзади

Рисунок 2.4 — Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 24$ состояний.

Глава 3. Поляризационные квантовые операции в анизотропной среде с дисперсией

В этой главе на основе концепции хи-матриц и состояний Чоя—Ямилковско-го предложен и развит новый подход для задач томографии квантовых процессов. Особое внимание уделено построению адекватных моделей для статистического восстановления квантовых операций. Разработанные методы и алгоритмы применены для томографии поляризационных квантовых операций на базе кварцевых пластин с учетом дисперсии и формы спектра входного излучения. Показано, что предложенный подход обеспечивает эффективное средство анализа экспериментальных данных при изучении таких явлений, как фотоупругость и поляризационное эхо.

Поляризационная степень свободы фотона может рассматриваться как одна из наиболее простых и фундаментальных реализаций квантового бита (кубита). Так, однокубитовые вращения на сфере Пуанкаре—Блоха могут быть легко выполнены посредством оптических пластинок, изготовленных из материалов, обладающих двулучепреломлением.

В работе [77] было показано, что посредством использования одних только однофотонных источников и детекторов, а также линейных оптических цепей, без привлечения специальных нелинейных оптических элементов, в принципе, может быть создан полномасштабный квантовый компьютер. В рассматриваемой модели взаимодействие осуществляется посредством использования вспомогательных фотонов-анцил, а также однофотонных детекторов (правда, результат квантового преобразования оказывается вероятностным). Некоторые квантовые алгоритмы такого рода уже реализованы экспериментально [78; 79].

Простейшая модель поляризационного кубита основана на пренебрежении спектральной компонентой излучения. В этой модели предполагается, что поляризационные преобразования фотонов не зависят от частоты излучения. Однако это не так, если учитывать дисперсию двулучепреломления кристаллов, из которых изготавливают оптические фазовые пластины.

В настоящей работе показывается, что рассматриваемое явление может быть описано в рамках формализма квантовых операций, который основывается на концепции вполне положительных отображений (см. работы [8; 80], а также статью [81]). Развитый подход применяется для задач томографии поляризаци-

онных квантовых операций, а также для исследования явлений фотоупругости и поляризационного эха.

Глава имеет следующую структуру. В целом, она делится на две взаимосвязанные части: теоретическое исследование и анализ экспериментальных данных. Теоретическое исследование (разделы 3.1–3.3) включает в себя разработку методов и алгоритмов для томографии квантовых процессов (раздел 3.1), анализ поляризационных преобразований в оптических фазовых пластинах с учетом дисперсии двулучепреломления (раздел 3.2), а также результаты численного моделирования (раздел 3.3). Анализ экспериментальных данных (разделы 3.4–3.6) направлен на приложение разработанных методов и алгоритмов для реализации нескольких практически важных протоколов томографии квантовых поляризационных преобразований (раздел 3.4), для исследования явления фотоупругости (раздел 3.5), а также для изучения эффекта поляризационного эха (раздел 3.6). В разделе 3.7 представлены краткие выводы.

3.1 Томография квантового процесса

Томография квантового процесса сводится к статистической реконструкции так называемой хи-матрицы и связанного с ней состояния Чоя—Ямилковского ρ_χ [8; 80; 81].

Осуществляя квантовый протокол измерений из m строк, мы последовательно регистрируем m значений частот событий k_j , $j = 1, \dots, m$. Если время экспозиции j -ой строки протокола равно t_j , то регистрируемое в эксперименте число событий k_j есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним $\lambda_j t_j$:

$$P(k_j) = \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j).$$

Здесь интенсивность генерации событий λ_j (ожидаемое число событий в схеме регистрации в единицу времени) определяется соответствующим оператором интенсивности Λ_j :

$$\lambda_j = \text{Tr}(\Lambda_j \rho_\chi). \quad (3.1)$$

Наиболее удобная параметризация для хи-матрицы и соответствующей матрицы плотности ρ_χ задается посредством процедуры очищения (purification), которая

определяет очищенный вектор состояния c [53]. Заметим, что в силу широкого унитарного произвола, вектор состояния c определяется неоднозначно (при этом, однако, все возможные векторы состояния отвечают одной и той же матрице плотности ρ_χ). С использованием очищенного вектора состояния выражение (3.1) будет иметь вид:

$$\lambda_j = \langle c | \Lambda_j | c \rangle.$$

Каждой строке j протокола измерения соответствует конкретный набор параметров измерения, задающий селектирование определенной проекции квантового состояния на входе и выходе. В настоящей работе рассматривались протоколы трех различных типов, которые ранее были введены в следующих работах (“R”(Singapore)-family: [82; 83]; “J”-family: [84; 85]; “BN”(Moscow)-family: [48—50]).

Протокол J4, предложенный в [85], представляет собой набор проекционных измерений поляризационных кубитов на фиксированные компоненты вектора Стокса: $|H\rangle, |V\rangle, |-45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|H\rangle - |V\rangle\}$, и $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|H\rangle - i|V\rangle\}$. Экспериментально эти измерения обычно реализуются с использованием двух фазовых пластин (полуволновой и четвертьволновой) и поляризационной призмы, выделяющей линейную (вертикальную) поляризацию.

Протокол R4 геометрически соответствует симметрии правильного тетраэдра. В этом случае четыре состояния, которые задают проекционные квантовые измерения, определяются направлениями из центра сферы Пуанкаре—Блоха к центрам граней соответствующего правильного тетраэдра.

Избыточный (по числу измерений) BN протокол использует одну фазовую пластину и поляризационную призму. Соответствующие измерения проводятся для N ориентаций фазовой пластины с шагом $180^\circ/N$. Оптимизация такого рода измерений подробно изучена в [48; 49].

Задача статистического восстановления квантового процесса состоит в том, чтобы по имеющимся экспериментальным данным восстановить в некотором смысле наилучшим образом соответствующее состояние Чоя—Ямилковского. Одним из наиболее важных способов такого рода является метод максимального правдоподобия Фишера. Наша задача состоит в том, чтобы найти такой очищенный вектор состояния c , который обеспечивал бы максимум для функции правдоподобия, которая в нашем случае задается произведением пуассоновских вероят-

ностей по всем строкам протокола:

$$L = \prod_{j=1}^m \frac{(\lambda_j t_j)^{k_j}}{k_j!} \exp(-\lambda_j t_j). \quad (3.2)$$

Необходимое условие экстремума функции (3.2) приводит к уравнению правдоподобия [53]:

$$Ic = Jc. \quad (3.3)$$

Здесь I и J — так называемые теоретическая и эмпирическая эрмитовы матрицы информации Фишера:

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j, \quad J = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{\lambda_j} \Lambda_j.$$

Условие нормировки, автоматически содержащееся в уравнении правдоподобия (3.3), имеет вид:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = \sum_{j=1}^m k_j = n, \quad (3.4)$$

где n — общее число зарегистрированных событий.

Условие (3.4) связывает полное число наблюдаемых событий n с суммарным (по всем строкам протокола) их ожидаемым числом. В нашем подходе рассматриваемое условие заменяет обычно применяемое условие нормировки на единицу: $\langle c|c \rangle = 1$. Для того, чтобы полученное в результате квантовой томографии состояние являлось истинным состоянием Чоя—Ямилковского, необходимо еще удовлетворить определенному условию нормировки квантовых операций [81]. Соответствующее условие заключается в том, что состояние Чоя—Ямилковского, редуцированное ко входу (к подсистеме A), должно описываться полностью хаотической матрицей плотности:

$$\rho^{(A)} = \frac{I_s}{s} \quad (3.5)$$

Здесь s — размерность гильбертова пространства ($s = 2$ для однокубитовых квантовых операций), I_s — единичная матрица размерности s .

Рассматриваемое условие нормировки может быть учтено посредством дополнительных ограничений, накладываемых на функцию правдоподобия (3.2) [86]. В настоящей работе мы, однако, выбрали альтернативный путь, который заключается в рассмотрении дополнительной вспомогательной статистики, учет которой эквивалентен наложению условия нормировки. Эта тривиальная дополнительная статистика отвечает виртуальным измерениям состояния (3.5). Заметим,

что для полностью хаотического состояния $\rho^{(A)}$ при проектировании на любой вектор состояния $|c_{in}^*\rangle$ возникает, очевидно, одна и та же вероятность, которая равна $\frac{1}{s}$.

$$P(c_{in}^*) = \text{Tr} \left(|c_{in}^*\rangle \langle c_{in}^*| \rho^{(A)} \right) = \frac{1}{s}$$

Соответствующий оператор измерения в пространстве Чоя—Ямилковского размерности s^2 соответствует суммированию по всем возможным исходам на выходе (в подсистеме B):

$$\Lambda(c_{in}^*) = |c_{in}^*\rangle \langle c_{in}^*| \otimes I_s.$$

Здесь в роли измеряемого состояния выступает состояние Чоя—Ямилковского ρ_χ .

$$\text{Tr}(\rho_\chi \Lambda(c_{in}^*)) = \frac{1}{s}. \quad (3.6)$$

Для каждого $|c_{in}^*\rangle$ условие (3.6) задает одну из дополнительных строк. Мы предполагаем, что набор состояний $|c_{in}^*\rangle$ является томографически полным.

Точность оценок максимального правдоподобия определяется матрицей полной информации, которая является аналогом матрицы информации Фишера в приложении к задаче оценки вектора квантового состояния [53].

Матрица полной информации определяется следующей формулой:

$$H = 2 \sum_j \frac{t_j (\Lambda_j c) (\Lambda_j c)^+}{\lambda_j}$$

Рассматриваемый объект задан в действительном евклидовом пространстве удвоенной размерности. Для получения вектора состояния c в этом представлении нужно мнимую часть очищенного вектора состояния расположить под его действительной частью.

3.2 Расчет χ -матрицы для волновой пластинки с учетом дисперсии

Идеальное унитарное преобразование, обеспечиваемое оптической пластинкой и отвечающее монохроматическому свету, есть вращение на сфере Пуанкаре—Блоха:

$$\begin{aligned} U &= \exp(-i\delta \vec{\sigma} \vec{n}) = I \cos \delta - i \vec{\sigma} \vec{n} \sin \delta = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \delta - i n_z \sin \delta & -i(n_x - i n_y) \sin \delta \\ -i(n_x + i n_y) \sin \delta & \cos \delta + i n_z \sin \delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассматриваемое преобразование представим в следующем виде:

$$U = \exp(-i\delta \{n_x \sigma_x + n_z \sigma_z\}),$$

где $\delta = \frac{\pi \Delta n h}{\lambda}$ — оптическая толщина пластинки, λ — длина волны излучения, h — геометрическая толщина пластинки, $\Delta n = n_o - n_e$ — разность показателей преломления между обычным (ординарным n_o) и необычным (экстраординарным n_e) лучами, $n_x = \sin(2\alpha)$, $n_z = \cos(2\alpha)$, α — угол между оптической осью и вертикалью Z. Мы предполагаем, что свет распространяется вдоль оси Y, а сама пластинка и ее оптическая ось лежат в плоскости XZ.

Для кварцевых пластин, которые использовались в анализируемых экспериментах, показатели преломления рассчитывались по следующим эмпирическим формулам [87]:

$$n_o = \sqrt{1.30979 + \frac{1.04683 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.01025} + \frac{1.20328 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 108.584}},$$

$$n_e = \sqrt{1.32888 + \frac{1.05487 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 0.01053} + \frac{0.97121 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - 84.261}}.$$

В представленных формулах длина волны λ предполагается измеренной в микрометрах.

Сопоставим унитарной матрице (3.7) чистый вектор состояния $|\Psi\rangle$ (для чего вытянем матрицу 2×2 в столбец длиной 4 и отнормируем). Тогда получим:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \delta - i n_z \sin \delta \\ -i(n_x + i n_y) \sin \delta \\ -i(n_x - i n_y) \sin \delta \\ \cos \delta + i n_z \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Указанный вектор определяется единственным параметром δ . Разным длинам волн λ_j отвечают различные оптические толщины δ_j и углы поворота $\theta_j = 2\delta_j$ на сфере Пуанкаре—Блоха и, соответственно, разные векторы состояния $|\psi_j\rangle$ (ось вращения $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ при этом одна и та же).

Рассматриваемые состояния образуют некогерентную смесь с весами $P_j = P(\lambda_j) \Delta\lambda$, где $P(\lambda)$ — спектральная плотность, $\Delta\lambda$ шаг дискретизации по длине волны. Для обеспечения высокой точности моделирования следует заменить непрерывный интервал длин волн достаточно большим числом дискретных точек-узлов. В настоящей работе выбиралось порядка 800 точек при численном моделировании.

Нетрудно видеть, что вектор $|\Psi\rangle$ фактически задан в двумерном подпространстве

$$|\psi\rangle = a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle.$$

Здесь ортонормированный базис есть:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} n_z \\ n_x + in_y \\ n_x - in_y \\ -n_z \end{pmatrix}.$$

Амплитуды вероятности есть:

$$a = \cos(\delta), \quad b = -i \sin(\delta).$$

Матрица плотности, отвечающая одной длине волны есть:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = aa^*|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + bb^*|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + ab^*|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + ba^*|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|.$$

Матрица плотности смеси, отвечающая χ -матрице, есть:

$$\rho_\chi = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| P_j.$$

Окончательно получаем χ -матрицу.

$$\chi = 2\rho_\chi.$$

Приведенный вывод объясняет, почему χ -матрица пластинки имеет ранг $r = 2$, хотя в общем случае он может быть $r = 4$.

3.3 Результаты численных экспериментов

Параметры излучения и оптической пластинки, которые использовались в анализируемых экспериментах: длина волны (мкм), отвечающая центру спектра $\lambda = 1.1509$ мкм, ширина спектра на полувысоте (Full Width Half Maximum — FWHM) $\Delta\lambda = 0.008$ мкм, форма спектра определялась функцией $\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^2$, геометрическая толщина пластины $h = 5024$ мкм, угол поворота оптической оси от вертикали $\alpha = \pi/4$.

В рассматриваемом случае соответствующая подлежащая восстановлению матрица плотности состояния Чоя—Ямилковского есть:

$$\rho_{\chi} = \begin{pmatrix} 0.42099 & -0.0047933i & -0.0047933i & 0.42099 \\ 0.0047933i & 0.079005 & 0.079005 & 0.0047933i \\ 0.0047933i & 0.079005 & 0.079005 & 0.0047933i \\ 0.42099 & -0.0047933i & -0.0047933i & 0.42099 \end{pmatrix}.$$

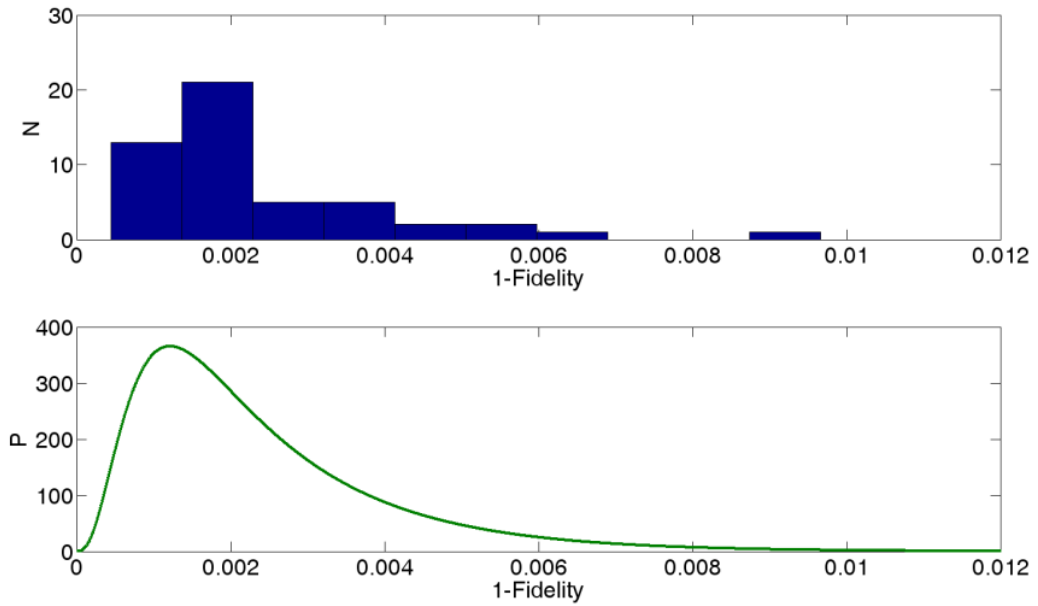
Рассматриваемая матрица плотности имеет ранг, равный двум ($r = 2$). Ее ненулевые собственные значения есть $\lambda_1 = 0.84212$, $\lambda_2 = 0.15788$. Цели исследования: сравнить точность протоколов J4 и R4, а также показать, что процедура, которая не учитывает, возможно, неполный ранг процесса, не вполне адекватна.

Рисунки 3.1 и 3.2 отвечают численным экспериментам с протоколом R4, рисунки 3.3 и 3.4 — численным экспериментам с протоколом J4.

Рисунок 3.1 отвечает случаю реконструкции квантового процесса адекватным методом, когда генерация данных и восстановление осуществляется посредством модели одинакового ранга, равного двум ($r = 2$). В этом случае наблюдается хорошее согласие между численными экспериментами и теоретическим распределением точности. Протокол R4, объем выборки в каждом эксперименте $n = 10^4$, число экспериментов $N = 50$.

Рисунок 3.2, напротив, демонстрирует результаты работы неадекватного алгоритма реконструкции, когда генерация данных осуществляется посредством модели ранга $r = 2$, а восстановление посредством модели ранга $r = 4$. В этом случае потери точности оказываются гораздо выше, чем в случае адекватного метода реконструкции. Протокол R4, объем выборки в каждом эксперименте $n = 10^4$, число экспериментов $N = 50$. Как показывают проведенные численные эксперименты, неадекватность модели реконструкции приводит к увеличению потерь точности в среднем более чем в 6 раз.

Рисунок 3.3 аналогичен рисунку 3.1 и отвечает случаю реконструкции квантового процесса адекватным методом, когда генерация данных и восстановление осуществляется посредством модели одинакового ранга, равного двум ($r = 2$). В этом случае наблюдается хорошее согласие между численными экспериментами и теоретическим распределением точности. Протокол J4, объем выборки в каждом эксперименте $n = 10^4$, число экспериментов $N = 50$. В рассматриваемом примере протокол J4 уступает по точности протоколу R4 в среднем в 1.6 раза



Вверху гистограмма, отвечающая численному эксперименту, внизу теоретическая плотность для распределения точности.

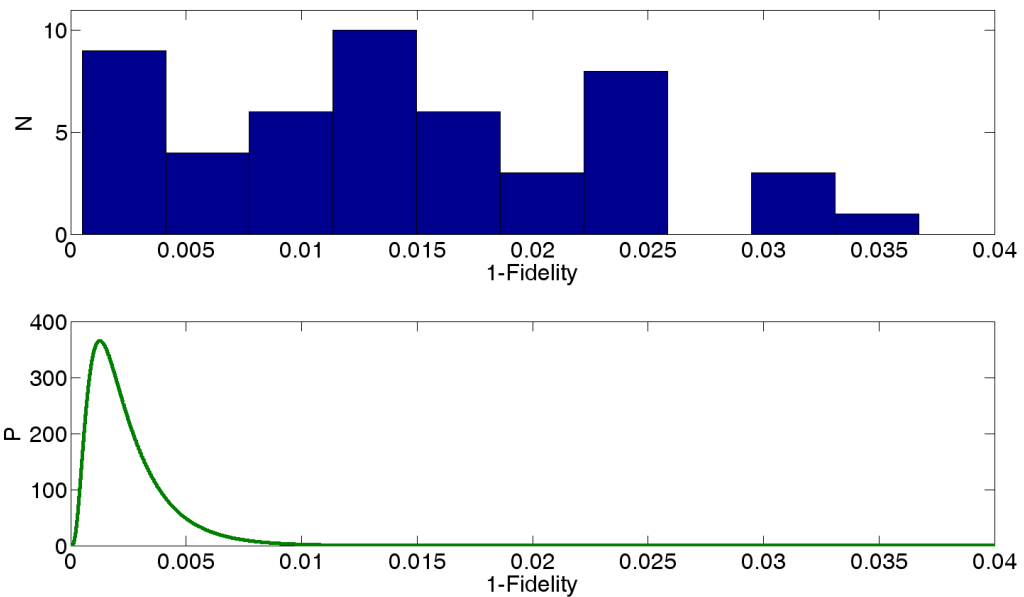
Рисунок 3.1 — Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол R4, ранг $r = 2$, адекватная модель

Наконец, рисунок 3.4 аналогичен рисунку 3.2 и демонстрирует результаты работы неадекватного алгоритма реконструкции, когда генерация данных осуществляется посредством модели ранга $r = 2$, а восстановление — посредством модели ранга $r = 4$. В этом случае потери точности оказываются гораздо выше, чем в случае адекватного метода реконструкции. Протокол J4, объем выборки в каждом эксперименте $n = 10^4$, число экспериментов $N = 50$. Как показывают проведенные численные эксперименты, неадекватность модели реконструкции приводит к увеличению потерь точности в среднем более чем в 8 раз.

Число действительных параметров, задающих N -кубитовую операцию ранга r в гильбертовом пространстве размерности $s = 2^N$, есть $\nu = 2s^2r - r^2 - s^2$. Для операции полного ранга имеем $r = s^2$, $\nu = s^4 - s^2$. Для операции неполного ранга соответствующее число степеней свободы может оказаться гораздо меньше, если $r \ll s^2$.

Если квантовая операция, имеющая неполный ранг, восстанавливается на основе модели полного ранга, то соответствующая модель оказывается явно неадекватной.

Проведенное выше исследование показывает, что использование подобного рода неадекватных моделей приводит к резкому уменьшению точности ста-



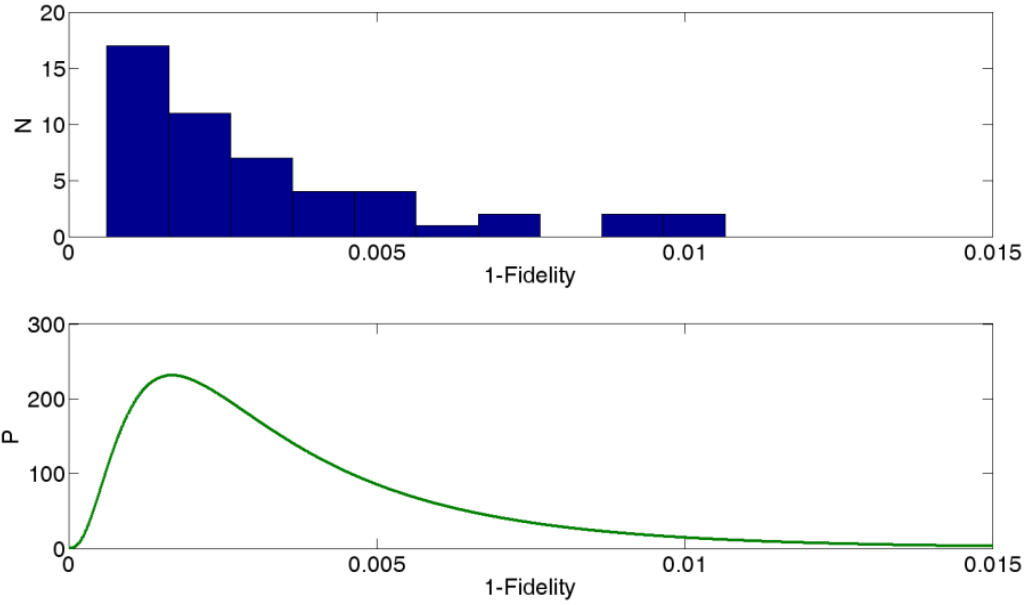
Вверху гистограмма, отвечающая численному эксперименту, внизу теоретическая плотность для распределения точности. Ранг модели для генерации данных $r = 2$, ранг модели для восстановления $r = 4$. Рисунок 3.2 — Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол R4, ранг $r = 4$, неадекватная модель

статистического восстановления квантовых операций. Фактически оказывается, что асимптотически с увеличением объема выборки n потери точности ведут себя как $1/\sqrt{n}$ для неадекватной модели (в то же время для адекватной модели соответствующая зависимость есть $1/n$) [88].

3.4 Протокол квантовых измерений и анализ экспериментальных данных

Анализируются экспериментальные данные, полученные в лаборатории квантовой информации и квантовой оптики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Экспериментальная установка показана на рисунке 3.5. Источником света служила лампа с галогенным циклом. Монохроматор выделял излучение с центральной длиной волны 1.1509 мкм и спектральной шириной, меняющейся в пределах 0.8 — 8 нм. Параллельный пучок света формировался при помощи одномодового волокна, на входе и выходе которого устанавливались микрообъективы.



Вверху гистограмма, отвечающая численному эксперименту, внизу теоретическая плотность для распределения точности.

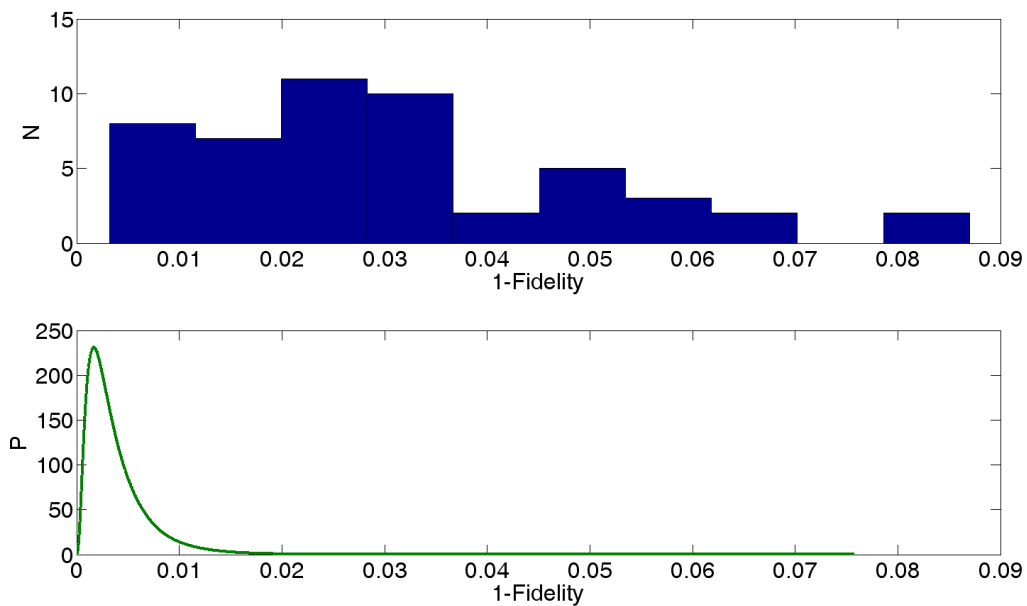
Рисунок 3.3 — Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол J4, ранг $r = 2$, адекватная модель

Одновременно такая система обеспечивала контролируемое ослабление исходного излучения до уровня, при котором однофотонный детектор работал в линейном режиме. Поляризационная призма Глана—Томпсона (V), выделяющая вертикальную поляризацию $|V\rangle$, и две фазовых пластинки с толщинами $h_1 = 19.5$ мкм, $h_2 = 312.7$ мкм служили для задания набора начальных поляризационных состояний.

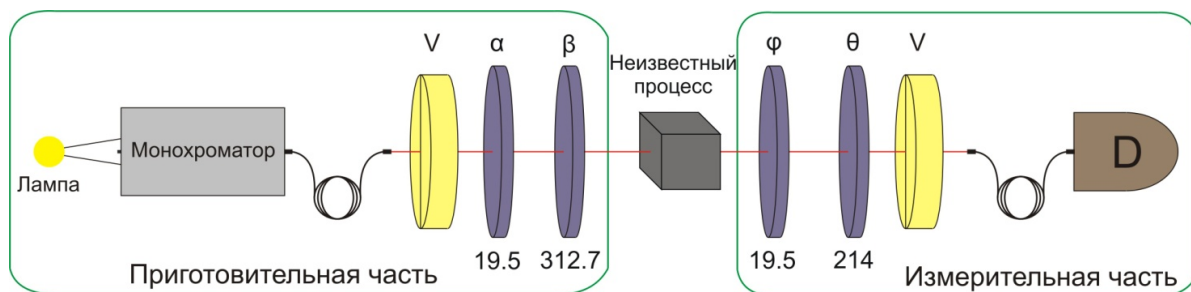
В качестве начальных состояний приготавливались три набора поляризационных состояний. Первый набор, J4, соответствовал поляризационным состояниям, являющимися компонентами вектора Стокса: $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|+45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|H\rangle + |V\rangle\}$ и $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|H\rangle + i|V\rangle\}$ [84; 85]. Во втором наборе (R4) поляризационные состояния a_i выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k = \frac{4}{3}\delta_{jk} - \frac{1}{3} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = k \\ -\frac{1}{3} & \text{для } j \neq k \end{cases}. \quad (3.8)$$

Соответствующие четыре вектора, удовлетворяющие (3.8) симметрично расположены и образуют тетраэдр, вписанный в сферу Пуанкаре—Блоха [83].



Вверху гистограмма, отвечающая численному эксперименту, внизу теоретическая плотность для распределения точности. Ранг модели для генерации данных $r = 2$, ранг модели для восстановления $r = 4$. Рисунок 3.4 — Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол J4, ранг $r = 4$, неадекватная модель

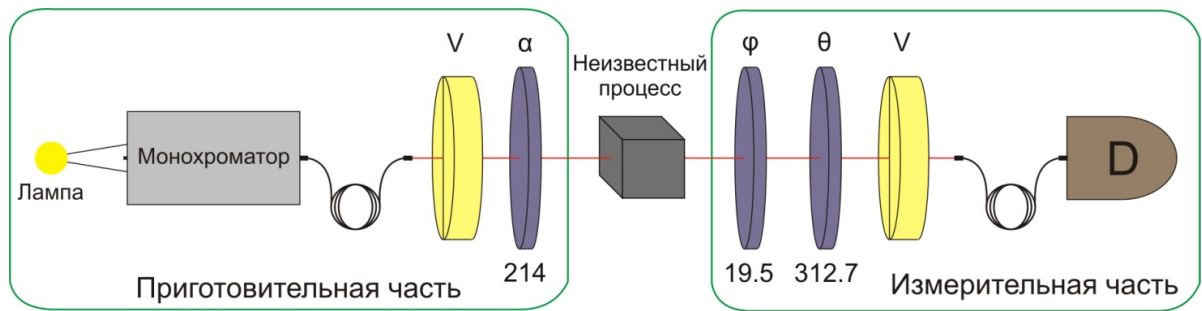


Толстые кварцевые пластины, осуществляя поляризационные преобразования входных состояний на заданной длине волны, выполняют роль неизвестной квантовой операции.

Рисунок 3.5 — Экспериментальная установка для томографии квантового процесса с использованием протоколов R4 и J4

В третьем наборе (B4) состояния задавались из начального $|V\rangle$ путем поворота фазовой пластинки толщиной $h_1 = 214$ мкм на углы $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ (см. рисунок 3.6).

Измерительная часть установки включала в себя две пластинки с толщинами $h_3 = 19.5$ мкм, $h_4 = 214$ мкм, анализатор (призма Глана—Томпсона, пропускающая вертикальную поляризацию $|V\rangle$) и однофотонный детектор на основе



Толстые кварцевые пластины, осуществляя поляризационные преобразования входных состояний на заданной длине волны, выполняют роль неизвестной квантовой операции.

Рисунок 3.6 — Экспериментальная установка для томографии квантового процесса с использованием протокола V_4

лавинного фотодиода с оптоволоконным входом и внутренним формирователем строба [89].

Каждый из трех наборов поляризационных состояний (J_4 , R_4 , V_4) измерялся в собственном базисе. Так, например, каждое из состояний из базиса J_4 восстанавливалось томографическим протоколом, основанном на проекционных измерениях на те же состояния. Таким образом, для каждого набора измерялось 16 проекций. Зная входные и выходные состояния можно построить χ -матрицу квантового процесса.

В эксперименте, в качестве квантового канала, преобразующего входные состояния, мы использовали набор толстых кварцевых пластин с толщинами $h = 5031$ мкм каждая, оптическая ось которых была ориентирована под углом 45° к вертикали. Для каждого набора состояний J_4 , R_4 , V_4 проводились две серии экспериментов. В первой серии на вход квантового канала подавались состояния с узкой спектральной шириной (FWHM) примерно 0.8 нм. Различные спектральные компоненты таких состояний, при прохождении квантового канала, преобразуются практически одинаково, и состояние остается квази-чистым. Во второй серии экспериментов щели монохроматора раскрывались полностью, пропуская, таким образом, более широкополосный спектр. На полувысоте спектральная ширина составляла 8 нм. При прохождении через квантовый канал (кварцевые пластинки), каждая из спектральных компонент поляризационных состояний преобразовывалась по-своему вследствие закона дисперсии и на выходе регистрировались смешанные состояния кубитов. Использование одной толстой кварцевой пластинки обеспечивало значения энтропии равные 63 % относительно максимально сме-

Таблица 5 — Точность восстановления квантовых операций
В скобках точность при использовании неадекватной модели.

Число пластин	Протокол J4		Протокол R4		Протокол B4	
	Спектральная ширина (нм)					
	0.8	8	0.8	8	0.8	8
0	0.9971	0.9938	0.9978	0.9971	0.9724	-
1	0.9541 (0.9279)	0.9812	0.9735	0.9749 (0.8259)	0.9679	0.9707
2	0.9486	0.9982	0.9669	0.9706	0.9426	0.9678

шанного состояния в выходных состояниях. Для двух пластинок состояния становились почти полностью смешанными (98 % энтропии).

В таблице 5 представлены результаты сравнения χ -матриц квантовых процессов, восстановленных для каждой серии экспериментов с χ -матрицами, полученными при моделировании соответствующих квантовых процессов.

Как правило, в задачах томографии квантового процесса пренебрегают спектральной компонентой входных состояний, рассматривая входные и выходные состояния как чистые. В действительности, спектральным составом можно пренебрегать далеко не всегда [88]. Так, например, бифотоны, рождаемые в процессе спонтанного параметрического рассеяния, могут обладать достаточно широким спектром. С этой точки зрения интересно проанализировать, как меняется точность реконструкции при учете спектрального состава поляризационных квантовых состояний.

Для сравнения различных протоколов томографии квантовых процессов можно использовать универсальное статистическое распределение точности квантовой томографии [53]. В таблице 5 представлены значения точности восстановления F , полученные посредством протоколов J4, R4 и B4. Были восстановлены различные квантовые операции для разных значений ширины спектра: 0.8 нм (квази-чистые состояния) и 8 нм (смешанные состояния). Первая строка носит вспомогательный характер, так как отвечает случаю, когда между подготовительной и измеряемой частями отсутствуют какие-либо кварцевые пластины. В этом случае соответствующая χ -матрица описывает тождественное преобразование с точностью, зависящей от качества процедур приготовления и измерения состояний.

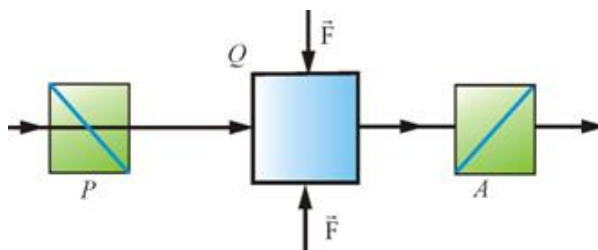
Вторая и третья строки соответствуют реконструкции квантовых процессов, осуществляемых соответственно одной и двумя толстыми кварцевыми пластинами. Точность процедуры восстановления зависит от ранга модели в полном соответствии с результатами теоретического рассмотрения, представленными выше в разделах 3.2 и 3.3. Для случая входных поляризационных состояний с достаточно узким спектром, качество восстановления выше при использовании модели с минимальным рангом. Например, для протокола J4, квантовый процесс, осуществляемый одной толстой кварцевой пластиной над квазичистыми состояниями, восстанавливается с точностью $F = 0.9541$ для модели ранга 1. Если восстанавливать этот же квантовый процесс с использованием алгоритма ранга 2, то точность снижается до уровня $F = 0.9279$. С другой стороны, рассмотрим реконструкцию протоколом R4 квантового процесса, соответствующего одной толстой кварцевой пластине для случая смешанных состояний. Адекватная модель ранга 2, учитывающая ширину спектра даёт более высокое значение точности $F = 0.9749$ (для неадекватной модели ранга 4 получим значение $F = 0.8259$).

3.5 Учет аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах

Одна из вероятных экспериментальных ошибок при приготовлении и преобразовании поляризационных квантовых состояний связана с пьезооптическим эффектом («фотоупругостью») [90], возникающим при механической фиксации изначально изотропных оптических элементов (зеркал, светоделительных пластин, линз, фильтров и т.д.) в оптических головках. Полностью избавиться от искусственной анизотропии практически невозможно, так как даже сравнительно малое давление приводит к ее возникновению.

Схема экспериментальной установки исследования эффекта представлена на рисунке 3.7.

Пластина диаметром в 1 дюйм была закреплена в стандартной оптомеханической головке, в которой фиксация элемента происходит посредством винта. Возрастающее давление приводит к возникновению анизотропии в пластине, несмотря на то, что в головках такого типа между металлическим винтом и закрепляемым элементом помещена эластичная прокладка.



Пластина из кварцевого стекла Q , к которой прикладывается механическое напряжение F , расположена между скрещенными поляризационными призмами P и A .

Рисунок 3.7 — Установка для наблюдения поляризационных преобразований, возникающих в результате искусственной анизотропии

Заметим, что аналогичный эффект можно наблюдать и в отраженном поляризованном свете, когда на стеклянную пластину нанесено диэлектрическое покрытие (зеркало).

Рассматриваемый эффект является линейным по напряжению:

$$\Delta n = n_e - n_o = K_1 \sigma.$$

Здесь $\sigma = \frac{F}{S}$ — механическое напряжение, K_1 — упругооптическая постоянная (постоянная Брюстера). Типичные величины упругооптической постоянной для стёкол лежат в пределах $K_1 \approx 10^{-12} \div 10^{-11}$ м²/Н.

При одностороннем воздействии оптический элемент становится подобным одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению приложенной силы.

Для повышения качества приготовления и измерения квантовых состояний систематические ошибки, возникающие по вышеприведенной причине, следует учитывать на этапе обработки экспериментальных данных, но для этого необходимо знать, какое преобразование делает элемент. В данном конкретном случае расчетные методы механических напряжений, а значит и вновь приобретенных оптических свойств элемента малоэффективны, поэтому мы использовали метод томографии квантовых процессов (quantum process tomography — QPT) для восстановления матрицы преобразования.

В качестве входного набора известных квантовых состояний использовались поляризационные состояния кубита, формирующие тетраэдр на сфере Пуанкаре—Блоха (базис R_4). Для каждого состояния из R_4 , преобразованного стеклянной пластинкой с наведенной анизотропией, проводилась полная квантовая

томография. По результатам входных и преобразованных состояний восстанавливалась χ -матрица, матрица, описывающая квантовый процесс.

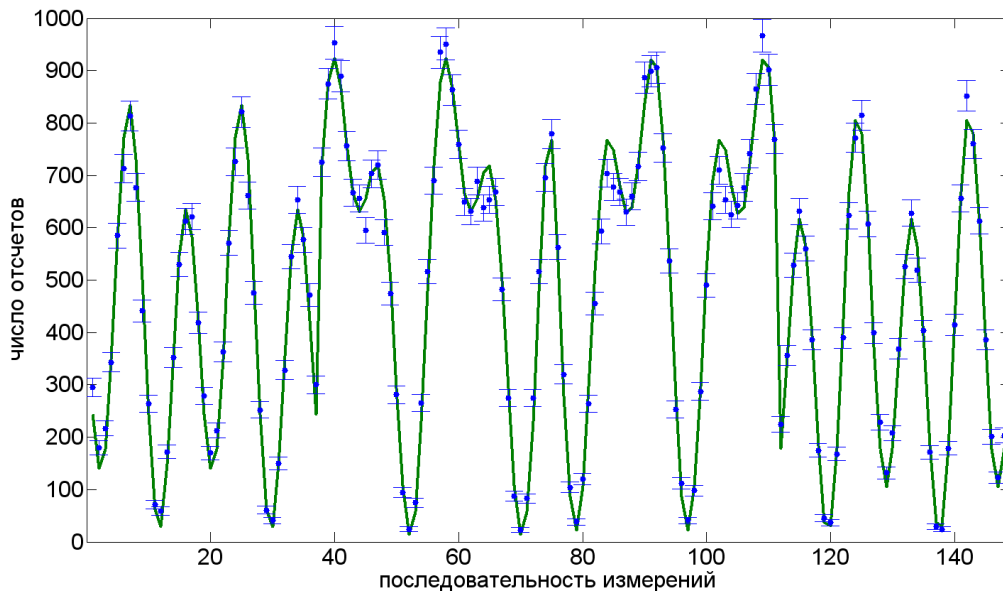
Схема экспериментальной установки аналогична рисунку 3.5, но вместо толстых кварцевых пластин устанавливалась стеклянная пластина, зажатая в оптомеханической головке. С помощью диафрагм, ограничивающих входной световой пучок, выбиралась область стеклянной пластинки с однородной цветностью, поэтому пространственной неоднородностью в коэффициентах преломления обыкновенного и необыкновенного лучей можно было пренебречь.

Набор входных состояний готовился при помощи пластинок 824 мкм и 356 мкм из состояния $|V\rangle$. Для восстановления преобразованных состояний использовался протокол В36, с пластинкой 312.7 мкм.

Восстановленное состояние Чоя—Ямилковского имеет следующий вид:

$$\rho_\chi = \begin{pmatrix} 0.50211 & 0.01813+0.00096273i & -0.009349-0.015417i & 0.19478+0.45978i \\ 0.01813-0.00096273i & 0.00065645 & -0.00036712-0.00053873i & 0.0079146+0.016228i \\ -0.009349+0.015417i & -0.00036712+0.00053873i & 0.00064743 & -0.017744-0.0025803i \\ 0.19478-0.45978i & 0.0079146-0.016228i & -0.017744+0.0025803i & 0.49659 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3.8 иллюстрирует результаты томографии квантового процесса. Мы видим хорошее согласие между статистической моделью и экспериментальными данными.



Точки — наблюдаемое число отсчетов, линии — ожидаемое число отсчетов, рассчитанное с использованием реконструированной χ -матрицы.

Рисунок 3.8 — Статистическое восстановление поляризационного квантового преобразования, связанного с фотоупругостью

Для проверки однородности наведенной анизотропии для каждого из преобразованных состояний из набора R4 восстанавливалась матрица плотности, после чего считалась энтропия $S = - \sum_{n=1}^2 \lambda_n \log \lambda_n$ (где λ_n — собственные значения матрицы плотности ρ), характеризующая чистоту состояния. Компонента смеси для каждого из состояний составила менее 0.1 %.

Результат восстановления χ -матрицы показывает, что стеклянная пластинка с наведенной анизотропией преобразует каждое из входных состояний из набора R4 одинаковым образом и может быть представлена в виде матрицы стандартного унитарного SU2 преобразования вида:

$$G = \begin{bmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{bmatrix},$$

где $r = i \sin(\delta) \sin(2\alpha)$, $t = \cos(\delta) + i \sin(\delta) \cos(2\alpha)$, $\delta = \frac{\pi \Delta n L}{\lambda}$ — оптическая толщина.

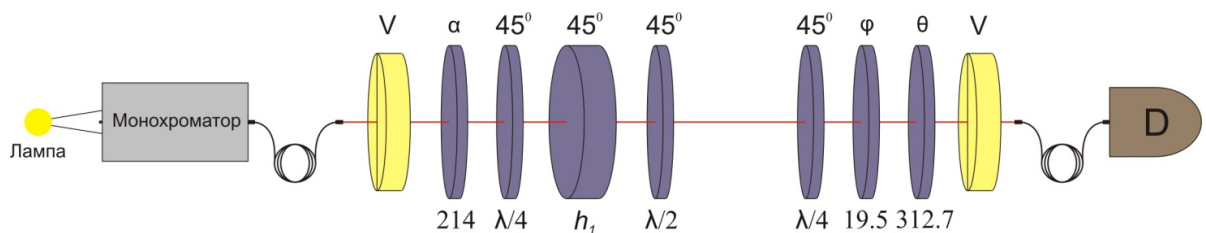
Зная такие параметры, как длина волны λ , геометрическая толщина L можно восстановить ориентацию оси α и разность показателей преломления $\Delta n = n_o - n_e$. Для нашего случая оказалось, что $\alpha = 91^\circ$, $\Delta n = 2.2 \times 10^{-3}$.

Отметим, что рассмотренные искажения поляризационных состояний неизбежны, когда к первоначально изотропным элементам (таким как зеркала, светоделительные пластины, линзы, фильтры и др.) прикладываются механические напряжения. Обычно это происходит в результате механической фиксации перечисленных выше оптических элементов. Избавиться от такого рода эффектов весьма сложно, т.к. даже малое механическое давление приводит к возникновению искусственной анизотропии, которая в свою очередь вносит непредсказуемые изменения в поляризационные состояния фотонов. Такого рода эффекты должны учитываться как на стадии приготовления, так и на стадии измерения квантовых состояний. Разработанные методы томографии квантовых процессов, на наш взгляд, весьма востребованы и эффективны как средство прецизионного контроля различных блоков в системах квантовых вычислений и связи.

3.6 Исследование явления поляризационного эха

Интересный эффект, проявляющийся при распространении света в анизотропной среде с дисперсией, связан с явлением поляризационного эха. Рассматриваемый эффект является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе [91]. В последнем случае явление связано с обращением дефазировки спинов, возникающей из-за дисперсии ларморовых частот. Рассматриваемая аналогия оказывается вполне правомерной вследствие формального совпадения уравнения эволюции вектора квазиспина электромагнитной волны в анизотропной среде с уравнением Блоха для спина в магнитном поле [92].

Зависимость показателя двулучепреломления от частоты света является прямым аналогом дисперсии ларморовых частот в ядерном магнитном резонансе. При прохождении через фазовую пластинку достаточно большой толщины, состояния с разной длиной волны испытывают существенно разную задержку фазы. В результате, в соответствии с расчетами раздела 3.2, поляризационное квантовое преобразование, осуществляемое посредством толстой фазовой пластины, приводит к превращению исходного чистого поляризационного состояния в поляризационную смесь. Схема установки, демонстрирующей рассматриваемое явление, представлена на рисунке 3.9.

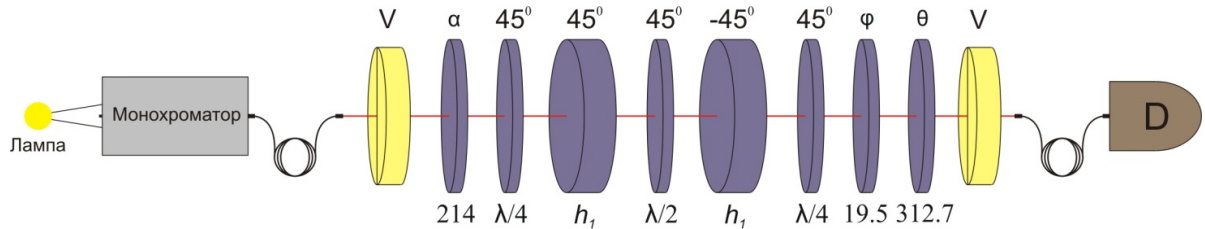


Толстая кварцевая пластина толщиной h_1 , ориентированная под углом 45° , из-за дисперсии в двулучепреломлении, задает поворот на сфере Пуанкаре—Блоха на разные углы для состояний фотонов с различными длинами волн, что приводит к дефазировке поляризационного состояния.

Рисунок 3.9 — Схема экспериментальной установки для наблюдения явления дефазировки поляризационного квантового состояния

Поляризационное эхо возникает, если подвергнуть систему воздействию дополнительного π -импульса, тем самым инвертировав фазы частотных компонент поляризационного состояния. Если затем подвергнуть систему аналогично-

му преобразованию с помощью точно такой же толстой фазовой пластины, то различие между фазовыми задержками, связанное с дисперсией, полностью компенсируется и поляризационное состояние восстановит свою чистоту. Таким образом, установка, включающая в себя две толстые фазовые пластины (рисунок 3.10), должна обеспечивать квантовое преобразование, близкое к тождественному.



Вторая толстая кварцевая пластина толщиной h_1 , ориентированная под углом -45° компенсирует эффект дефазировки поляризационного состояния, вызванный первой толстой кварцевой пластиной толщиной h_1 , ориентированной под углом $+45^\circ$.

Рисунок 3.10 — Схема экспериментальной установки, отвечающая случаю наблюдения поляризационного эха

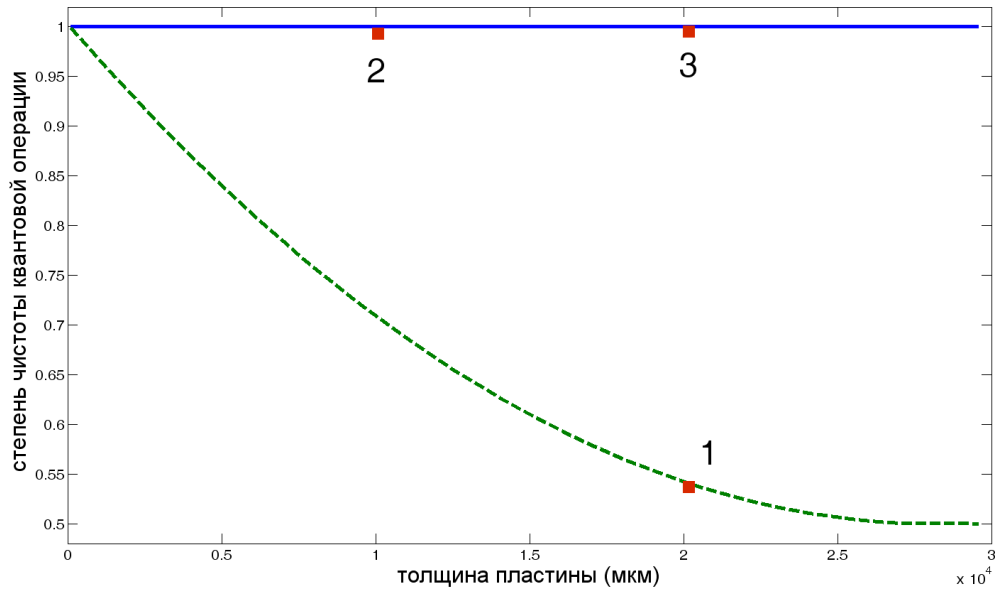
Выводы, представленные выше, полностью подтверждаются проведенными численными расчетами и результатами реальных экспериментов. В качестве контролируемого параметра была выбрана степень чистоты (purity) поляризационной операции.

Пусть $\rho_\chi = \frac{\chi}{2}$ — матрица плотности состояния Чоя—Ямилковского для χ -матрицы рассматриваемой операции. Тогда искомый параметр задается формулой:

$$\text{Purity} = \text{Tr}(\rho_\chi^2)$$

На рисунке 3.11 представлены результаты численных расчетов, а также результаты трех реальных экспериментов. Расчеты и эксперименты проводились при следующих значениях параметров: длина волны излучения 1550.9 нм, ширина спектра на полувысоте линии пропускания монохроматора 8 нм, толщины кварцевых пластинок $h_1=10092$ мкм и $h_1=20184$ мкм соответственно. Томография осуществлялась посредством протокола В4 с помощью тонких кварцевых пластин с толщинами 19.5 мкм и 312.7 мкм соответственно. Входные состояния приготавливались с помощью тонкой кварцевой пластины толщиной 214 мкм, ориентированной для разных состояний соответственно под углами 0° , 20° , 40° и 60° от вертикали.

Штриховая линия на рисунке 3.11 отвечает экспериментальной установке на рисунке 3.9. В этом случае эффект поляризационного эха не возникает. Заметим, что асимптотически при больших толщинах пластины уровень чистоты операции стремится к значению 0.5 (из четырех собственных значений матрицы плотности состояния Чоя—Ямилковского два главных значения равны 0.5, а два другие нулевые).



Сплошная кривая — наблюдение явления поляризационного эха, штриховая кривая — наблюдение эффекта дефазировки поляризационного состояния. Точки 1, 2 и 3 соответствуют результатам проведенных экспериментов.

Рисунок 3.11 — Зависимость чистоты поляризационной операции от толщины фазовой пластинки

Представим более подробно результаты томографии квантовых процессов для экспериментальных точек 1, 2 и 3 на рисунке 3.11. Точка 1 отвечает экспериментальной установке на рисунке 3.9, $h_1=20184$ мкм. Теоретическая матрица плотности для состояния Чоя—Ямилковского есть:

$$\rho_{\chi}^0 = \begin{pmatrix} 0.1799 & 0.011702i & 0.011702i & 0.1799 \\ -0.011702i & 0.3201 & 0.3201 & -0.011702i \\ -0.011702i & 0.3201 & 0.3201 & -0.011702i \\ 0.1799 & 0.011702i & 0.011702i & 0.1799 \end{pmatrix}.$$

Экспериментально реконструированная матрица плотности для состояния Чоя—Ямилковского есть:

$$\rho_{\chi} = \begin{pmatrix} 0.18809 & -0.000639+0.028494i & -0.000639+0.028494i & 0.18809 \\ -0.000639-0.028494i & 0.31191 & 0.31191 & -0.000639-0.028494i \\ -0.000639-0.028494i & 0.31191 & 0.31191 & -0.000639-0.028494i \\ 0.18809 & -0.000639+0.028494i & -0.000639+0.028494i & 0.18809 \end{pmatrix}.$$

Степень согласия между теоретической и реконструированной операциями есть: $F = 0.9986$. Чистота реконструированной операции равна $\text{Purity} = 0.53716$, что близко к соответствующему теоретическому значению $\text{Purity}(\text{theory}) = 0.54041$.

Точки 2 и 3 отвечают экспериментальной установке на рисунке 3.10, соответствующие толщины толстых пластин есть $h_1=10092$ мкм и $h_1=20184$ мкм. В обоих этих случаях теоретическая матрица плотности для состояния Чоя—Ямилковского отвечает тождественному преобразованию:

$$\rho_{\chi}^0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Экспериментально реконструированная матрица плотности для состояния Чоя—Ямилковского для точки 2 есть:

$$\rho_{\chi} = \begin{pmatrix} 0.49826 & -0.000224+0.003141i & -0.000224+0.003141i & 0.49826 \\ -0.000224-0.003141i & 0.00174 & 0.00174 & -0.000224-0.003141i \\ -0.000224-0.003141i & 0.00174 & 0.00174 & -0.000224-0.003141i \\ 0.49826 & -0.000224+0.003141i & -0.000224+0.003141i & 0.49826 \end{pmatrix}.$$

Степень согласия между теоретической и реконструированной операциями есть: $F = 0.9965$. Чистота реконструированной операции равна $\text{Purity} = 0.99315$, что близко к идеальному теоретическому значению $\text{Purity}(\text{theory}) = 1$.

Наконец, экспериментально реконструированная матрица плотности для состояния Чоя—Ямилковского для точки 3 есть:

$$\rho_{\chi} = \begin{pmatrix} 0.49879 & -0.000207+0.000149i & -0.000207+0.000149i & 0.49879 \\ -0.000207-0.000149i & 0.00121 & 0.00121 & -0.000207-0.000149i \\ -0.000207-0.000149i & 0.00121 & 0.00121 & -0.000207-0.000149i \\ 0.49879 & -0.000207+0.000149i & -0.000207+0.000149i & 0.49879 \end{pmatrix}.$$

Степень согласия между теоретической и реконструированной операциями равна $F = 0.9976$, а чистота реконструированной операции составляет $\text{Purity} = 0.99519$.

Представленные результаты показывают хорошее согласие между проведенными расчетами и экспериментальными данными.

На наш взгляд, рассмотренное явление может быть использовано для усиления секретности в протоколах распределения ключа в квантовой криптографии.

Использование не одной, а нескольких толстых эллиптических фазовых пластинок разных толщин с оптическими осями, повернутыми на разные углы от вертикали, позволят обеспечить «расплывание» поляризационного состояния практически по всей сфере Пуанкаре—Блоха. В этом случае, например при реализации протокола BB84 подслушивающая сторона (Ева) будет вынуждена угадывать не только базис, в котором посылается однофотонное поляризационное состояние, но и комбинацию фазовых пластин, которая превращает «размазанное» по сфере Пуанкаре—Блоха состояние в четко локализованное. Заметим, что если в процессе распределения секретного ключа между посылающей (Алисой) и принимающей (Бобом) сторонами, небольшая часть генерируемого ключа будет использована для непрерывного изменения дефазировочного преобразования, то задача взлома такого рода протокола резко усложнится.

3.7 Выводы по главе

В настоящей главе были представлены задачи статистического восстановления квантовых процессов. Подход к решению таких задач основан на концепции хи-матриц и состояний Чоя—Ямилковского.

Анализ экспериментальных данных демонстрирует эффективность разработанных методов и алгоритмов томографии квантовых процессов при анализе поляризационных преобразований, осуществляемых в анизотропных и рассеивающих средах.

Показано, что разработанный метод квантовой томографии, основанный на дополнении состояния Чоя—Ямилковского до чистого состояния и оптимальной оценке ранга квантовой операции, обеспечивает многократное увеличение точности по сравнению с ранее известными стандартными методами.

Показано, что разработанные методы и алгоритмы описания квантовых операций с учетом шумов могут быть приложены к обеспечению качества и эффективности квантовых информационных технологий, основанных на поляризационной степени свободы фотонов.

Предложено теоретическое описание и выполнена обработка экспериментальных данных, связанных с учетом аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оп-

тических элементах. Одна из вероятных экспериментальных ошибок такого рода возникает при приготовлении и преобразовании поляризационных квантовых состояний и связана с пьезооптическим эффектом (так называемой фотоупругостью). Эффект возникает при механической фиксации изначально изотропных оптических элементов (зеркал, светоделительных пластин, линз, фильтров и т.д.) в оптических оправах. Для повышения качества приготовления и измерения квантовых состояний систематические ошибки, возникающие по вышеприведенной причине, следует учитывать, как на этапе проектирования квантового информационного прибора, так и на этапе обработки экспериментальных данных. Полученные результаты свидетельствуют о хорошем согласии между разработанной теорией и выполненными экспериментами.

Разработанные методы анализа квантовых операций с учетом шумов были применены к исследованию явления поляризационного эха, которое является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе. Показано хорошее согласие разработанной теоретической модели с результатами численных и реальных экспериментов. Разработанные методы и алгоритмы исследования поляризационного эха могут быть использованы для усиления секретности в протоколах распределения ключа в квантовой криптографии.

Результаты главы представлены в публикациях [93—95].

Глава 4. Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений

В данной главе описывается новый метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных измерений. В основе описываемого метода лежит корневой подход и использование в качестве базиса сдвинутых сжатых фоковских состояний. Теоретический анализ и выполненные численные эксперименты демонстрируют существенное превосходство разработанных средств по сравнению с описанными в литературе.

Квантовые измерения являются основным средством для контроля квантовых состояний и процессов при разработке технологий квантовых вычислений [1—6] и квантовой связи [7; 8]. Прецизионные методы квантовых измерений необходимы и для глубокого понимания таких фундаментальных квантовых явлений как запутанность [9; 96], дискорд [10—13] и телепортация [14; 38; 97].

В задачах восстановления оптических квантовых состояний могут рассматриваться самые различные степени свободы электромагнитного поля, в том числе дискретные поляризационные состояния [19; 20; 50; 51; 82—85; 98—105], а также пространственно-угловые [106—109] и частотно-временные [110—112] переменные.

Важное значение для задач квантовой информатики имеют квантовые состояния света с неопределенным числом фотонов. Такие состояния задаются суперпозициями фоковских состояний и, чаще всего, включают в себя бесконечное число слагаемых. Адекватным средством контроля рассматриваемых состояний служат так называемые квадратурные измерения квантованного электромагнитного поля. При анализе квадратурных измерений мы сталкиваемся с необходимостью исследовать системы, которые формально являются системами с бесконечным числом степеней свободы. В этом случае неизбежно возникает дополнительная существенная проблема, связанная с оптимальным усечением гильбертова пространства. С одной стороны, такое усеченное (редуцированное) пространство должно быть достаточно широким, чтобы без существенной потери точности вмещать в себя исследуемое состояние и его возможные флуктуации. С другой стороны, редуцированное пространство должно быть и достаточно узким, чтобы

максимально снизить влияние неизбежных шумов, вызванных высокой размерностью задачи [55; 113].

В основе квантовых измерений лежит принцип дополнительности Н. Бора [46]. Согласно этому принципу, “данные, получаемые при разных условиях опыта, не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны скорее рассматриваться как дополнительные в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта” [46]. Принцип дополнительности настолько важен для описания квантовых явлений, что, например, согласно В. Паули, “по аналогии с термином «теория относительности» современную квантовую теорию можно было бы назвать «теорией дополнительной»” [114]. Формальное описание квантового состояния, основанное на понятиях вектора состояния и матрицы плотности, не сводится к какому-либо одному распределению вероятностей. Со статистической точки зрения квантовое состояние можно рассматривать как естественное обобщение понятия распределения вероятностей [52]. Квантовая механика обеспечивает более глубокое и полное понимание вероятностных и статистических закономерностей по сравнению с классическими представлениями [18; 47]. Согласно принципу дополнительности, экспериментальное изучение квантового состояния должно базироваться на измерении совокупности взаимно-дополнительных распределений. Например, экспериментальное исследование квантовой системы будет более полным, если данные, полученные при изучении квантового ансамбля в координатном пространстве, дополнить изучением того же ансамбля в канонически сопряженном (импульсном) пространстве. Известная задача Паули (Pauli Problem), как раз, и состоит в том, чтобы реконструировать пси-функцию на основе координатного и импульсного распределений [114]. Благодаря развитию техники гомодинамирования в современной квантовой оптике [115; 116], задача об измерении квантового состояния перешла из сугубо теоретической области в область реальных квантовых информационных технологий, причем в более полной постановке, чем это первоначально предполагал В. Паули.

Оказалось, что для измерения квадратурных наблюдаемых электрического поля достаточно совместить на сбалансированном светоделителе (50/50) изучаемое поле с более мощным оптическим излучением (рисунок 4.1). Тогда в выходных каналах такого светоделителя будет наблюдаться интерференционный сигнал, который может быть измерен фотодетекторами. Для того, чтобы выделить

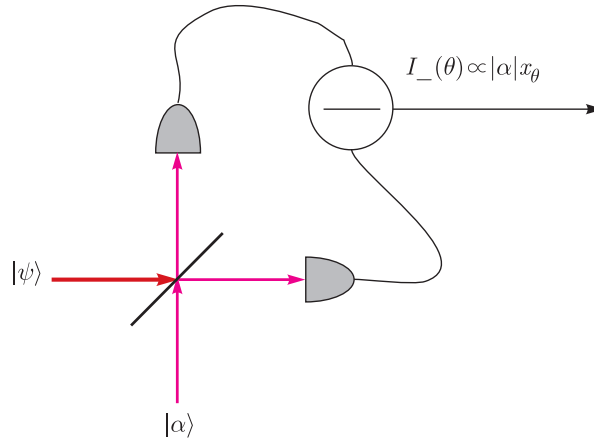


Рисунок 4.1 — Схема гомодинных измерений. Неизвестное состояние $|\psi\rangle$ совмещается на 50/50 светоделителе с когерентным состоянием гомодина $|\alpha\rangle$. Тогда разностный фототок I_- , регистрируемый при фазе гомодина θ будет пропорционален $|\alpha| x_\theta$, где x_θ — значение квадратурной компоненты.

зависящие от фазы гомодина флуктуации фототока на фоне постоянной компоненты, следует усилить и измерить разностный фототок.

В рассматриваемой схеме, измеренные при разных значениях фазы гомодина θ значения разностного фототока соответствуют собственным значениям x_θ квадратурного оператора. При этом, координата и импульс являются только двумя частными случаями, отвечающими фазам гомодина 0 и $\pi/2$ соответственно [55; 117; 118]. С использованием рассматриваемой технологии были измерены однофотонные, двухфотонные, сжатые, смещенные когерентные и некоторые другие состояния света [119].

Квадратурная наблюдаемая в квантовой механике определяется как следующая линейная комбинация операторов координаты X и импульса P [117]:

$$X_\theta = X \cos(\theta) + P \sin(\theta).$$

Заметим, что случай нулевого угла ($\theta = 0$) отвечает оператору координаты, а случай $\theta = \pi/2$ — оператору импульса.

Выразим операторы координаты и импульса через операторы рождения $a^\dagger$ и уничтожения a квантованного электромагнитного поля:

$$X = \frac{(a + a^\dagger)}{\sqrt{2}}, P = -i \frac{(a - a^\dagger)}{\sqrt{2}}.$$

Тогда квадратурный оператор может быть представлен следующей формулой:

$$X_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} [a \exp(-i\theta) + a^\dagger \exp(i\theta)].$$

Рассмотрим собственные векторы $|x, \theta\rangle$ и собственные значения x_θ для квадратурного оператора X_θ :

$$X_\theta |x, \theta\rangle = x_\theta |x, \theta\rangle.$$

Заметим, что квадратурная наблюдаемая X_θ имеет непрерывный спектр $(-\infty < x_\theta < +\infty)$.

Будем называть квадратурной волновой функцией некоторого квантового состояния $|\psi\rangle$ проекцию $\psi(x_\theta) \equiv \langle x, \theta | \psi \rangle$. Заметим, что переход от исходной волновой функции по обобщенной координате $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle \equiv \langle x, 0 | \psi \rangle$ к квадратурной волновой функции $\psi(x_\theta)$ осуществляется посредством преобразования $\tilde{\psi}(x_\theta) = \int \psi(x') \langle x, \theta | x' \rangle dx'$, которое в точности соответствует дробному преобразованию Фурье (FRFT) [120; 121]. Соответственно, обратный переход осуществляется при помощи обратного дробного преобразования Фурье (IFRFT):

$$\tilde{\psi}(x_\theta) = \text{FRFT}_\theta [\psi(x)] \quad \psi(x) = \text{IFRFT}_\theta [\tilde{\psi}(x_\theta)].$$

В случае $\theta = \pi/2$, когда $x_\theta = p$, дробное преобразование Фурье превращается в обычное преобразование Фурье. Заметим, что ядра прямого и обратного преобразования являются комплексно сопряженными друг по отношению к другу.

В основе томографии оптических квантовых состояний лежит следующее важное свойство дробного преобразования Фурье. Пусть $\psi_k(x)$ — собственные функции гармонического осциллятора, задающие базисный набор функций Чебышева—Эрмита:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

где $H_k(x)$ — полином Чебышева—Эрмита k -го порядка. Оказывается, что эти функции сохраняют свой вид под действием дробного преобразования Фурье (FRFT), приобретая при этом фазу $\exp(ik\theta)$, которая зависит от номера базисной функции k :

$$\text{FRFT}[\psi_k(x)] = \exp(ik\theta) \psi_k(x_\theta).$$

С формальной точки зрения можно считать, что базисные функции Чебышева—Эрмита являются собственными функциями унитарного оператора, задающего дробное преобразование Фурье. В соответствии с унитарным характером преобразования, собственные значения равны по модулю единице (в нашем случае это $\exp(ik\theta)$).

Для восстановления квадратурных состояний используются разные подходы, обзор которых можно найти в работах [119; 122—125]. Традиционные способы основаны на восстановлении функции Вигнера из исходных распределений квадратур путем обратного преобразования Радона [115; 116], а также с помощью использования специальных модельных функций (pattern functions) [123; 126]. Более современный подход, который используется и в настоящей работе, основан на восстановлении квантовых состояний методом максимального правдоподобия [17; 18; 47; 52].

В настоящем исследовании мы опираемся на корневой подход к рассматриваемой проблематике, описание которого можно найти в разделе 1.3 и работах нашей лаборатории [18; 47—53]. Томография на основе корневого подхода предполагает, что мы оцениваем не непосредственно матрицу плотности квантового состояния ρ , а квадратный корень из нее $c = \sqrt{\rho}$ (отсюда и название метода). Рассматриваемая величина есть амплитуда вероятности очищенного состояния. Понятно, что очищенное состояние определено неоднозначно; например, если U — произвольная унитарная матрица соответствующей размерности, то $\sqrt{\rho}$ и $\sqrt{\rho}U$ эквивалентны. Такая неоднозначность, однако, не создает каких-либо трудностей, поскольку рассматриваемые очищенные состояния отвечают одной и той же матрице плотности ρ . Заметим, что непосредственное описание матрицы плотности как объекта в многомерном пространстве является простым только в случае двумерного ($s = 2$) состояния кубита (в этом случае геометрия квантового состояния непосредственно задается сферой Блоха). Однако, по мере роста размерности гильбертова пространства, геометрия пространства состояний становится очень сложной [9].

В нашем подходе квантовое состояние — это просто произвольная комплексная матрица c , удовлетворяющая условию нормировки $\text{Tr}(cc^\dagger) = 1$. Размерность матрицы c равна $s \times r$, где s — размерность гильбертова пространства, r — ранг квантового состояния (число компонент в смеси), $1 \leq r \leq s$. Фактически, очищенное квантовое состояние «живет» в расширенном гильбертовом пространстве размерности $s \times r$. Простота описания пространства возможных состояний обеспечивает простоту итерационных процедур реконструкции, а также возможность описания состояний различного ранга от чистых ($r = 1$) до максимально смешанных ($r = s$). Еще одно преимущество развиваемого подхода — это возможность измерения информации о параметрах квантового состояния, которая содержится в том или ином протоколе квантовых измерений [17; 51; 55].

4.1 Статистическое восстановление квантовых состояний

Возможные квадратурные состояния обладают бесконечным разнообразием, однако в настоящий момент существует очень ограниченный набор классов состояний, доступных в эксперименте и представляющих интерес для задач квантовой оптики и квантовой информатики. Среди них — суперпозиции фоковских состояний, когерентные состояния, суперпозиция когерентных состояний (в частности, состояние кота Шредингера), сдвинутые и сжатые фоковские состояния [119]. Часто в процессе томографии исследуемое состояние представляется в фоковском базисе, при этом для полноценного представления нередко необходимо учитывать несколько десятков или сотен фоковских состояний, что приводит к большому числу восстанавливаемых действительных коэффициентов, а значит, к малой точности восстановления.

В настоящей работе мы используем базисный набор функций, который получается из набора фоковских состояний $|k\rangle$ ($k = 0, 1, \dots$) путем последовательного применения операций сдвига $D(\alpha)$ и сжатия $S(\xi)$:

$$\begin{aligned} |\alpha, \xi, k\rangle &= S(\xi) D(\alpha) |k\rangle, \text{ где} \\ D(\alpha) &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \\ S(\xi) &= \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь α и ξ — комплексные параметры, а $a^\dagger$ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов.

Полученный набор функций $|\alpha, \xi, k\rangle$, также как исходный набор $|k\rangle$ является полным.

Частными случаями рассматриваемого описания являются обычные фоковские состояния $|k\rangle = |0, 0, k\rangle$ (когда $\alpha = 0, \xi = 0$), когерентные состояния $|\alpha\rangle = |\alpha, 0, 0\rangle$ (когда, $\xi = 0, k = 0$), сжатые вакуумные состояния $|\xi\rangle = |0, \xi, 0\rangle$ (когда $\alpha = 0, k = 0$), сжатые фоковские состояния $|\xi, k\rangle = |0, \xi, k\rangle$ (когда $\alpha = 0, k \neq 0$), сжатые когерентные состояния $|\alpha, \xi\rangle = |\alpha, \xi, 0\rangle$ (когда $k = 0$) и др. Во всех этих случаях, в рассматриваемом базисе, в разложении будет только одно ненулевое слагаемое. Таким образом, широкий набор важных, широко используемых квантовых состояний представляется в простейшей из возможных форм. В других важных случаях в новом базисе интересующие исследователя состояния

представляются в виде суперпозиции из достаточно малого (часто двух-трех) базисных состояний, что кардинально увеличивает точность их восстановления.

Опишем алгоритм анализа квадратурных данных.

Для восстановления квадратурного состояния поля в настоящей работе используется метод максимального правдоподобия, который заключается в поиске максимума функции логарифмического правдоподобия

$$S = \log L, \text{ где } L = \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta_k | c). \quad (4.3)$$

Здесь $\{x_k, \theta_k\}$ — набор из n экспериментально измеренных значений квадратур x_k при соответствующих значениях фазы θ_k . Плотность вероятности в точке (x_k, θ_k) для состояния $\rho \equiv cc^\dagger$ имеет вид:

$$p(x_k, \theta_k | c) = \langle x_k, \theta_k | \rho | x_k, \theta_k \rangle = \sum_{j,l,m} (c^\dagger)_{ml} \varphi_l^*(x_k, \theta_k) \varphi_j(x_k, \theta_k) c_{jm}, \quad (4.4)$$

где $\varphi_j(x, \theta)$ — набор базисных функций сдвинутых сжатых фоковских состояний (4.2):

$$\varphi_j(x, \theta) \equiv \langle x, \theta | \alpha, \xi, j \rangle = \sum_{k,l} \psi_k(x) \exp(ik\theta) S_{kl} D_{lj}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1. \quad (4.5)$$

Здесь S_{kl} и D_{lj} — матричные элементы операторов сжатия и сдвига в фоковском базисе, а $\psi_k(x)$ — базисная функция гармонического осциллятора (4.1).

В настоящей работе при решении задачи максимизации (4.3) варьировались не только значения элементов матрицы c , но и параметры базиса α и ξ . Таким образом определялись не только оптимальные амплитуды вероятностей, но и оптимальный вид базисных функций.

Формально верхняя граница суммирования в (4.5) по индексам фоковских состояний k, l простирается до бесконечности, но в реальных вычислениях полагают $k, l = 0, 1, \dots, N$, ограничиваясь таким достаточным большим числом фотонов N , при котором вклад всех состояний с более высоким числом фотонов оказывается пренебрежимо малым. Заметим, что в случае, когда $s \ll N$, имеет место радикальное снижение размерности задачи. В этом случае исходная задача в гильбертовом пространстве размерности $N + 1$ сводится к рассмотрению задачи в гильбертовом пространстве существенно более низкой размерности s . Это, в свою очередь, приводит к существенному упрощению процедуры нахождения

решения и радикальному увеличению точности восстановления квантовых состояний.

При заданных x и θ формула (4.5) определяет отдельную строку длины s аппаратной матрицы протокола квантовых измерений. Скалярное произведение $\sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j(x, \theta) c_{jl}$ определяет r амплитуд вероятности по числу компонент в смеси, ($l = 1, \dots, r$). Сумма квадратов модулей амплитуд определяет плотность $p(x, \theta|c)$ (4.4), как уже отмечалось выше. При фиксированном θ и различных x возникает набор строк, который определяет отдельное квадратурное распределение $P_\theta(x|c)$. Весь протокол квантовых измерений определяет совокупность взаимно-дополнительных распределений $P_\theta(x|c)$ при различных θ .

Технически, для нахождения максимума функции S (4.3) решается уравнение правдоподобия, определяющее точку экстремума. В рамках корневого подхода оно имеет следующий вид [52]:

$$Rc = nc. \quad (4.6)$$

Здесь R — матрица размерности $s \times s$, c — очищенная амплитуда вероятности, представляющая собой матрицу размерности $s \times r$ для квантового состояния ранга r , n — объем выборки. Матричные элементы матрицы R даются следующим выражением:

$$R_{jl} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_j^*(x_k, \theta_k) \varphi_l(x_k, \theta_k)}{p(x_k, \theta_k|c)}, \quad j, l = 0, 1, \dots, s-1.$$

Рассматриваемая задача является линейной по форме, однако сама матрица R зависит от неизвестной квадратурной плотности $p(x, \theta|c)$, поэтому, по существу, рассматриваемая задача является нелинейной и должна решаться методом итераций [47; 52].

4.2 Методика, алгоритм и результаты численных экспериментов

Для тестирования разработанных методов, алгоритмов и программ анализа квадратурных квантовых измерений выполнялись численные эксперименты. Точность восстановления квантовых состояний, достигнутая в численных экспериментах, сравнивалась с теорией [50; 53].

Алгоритм численного эксперимента включает в себя следующие основные этапы: выбор квантового состояния, генерация данных квадратурных измерений, выбор модели для реконструкции квантового состояния, решение уравнения правдоподобия, оценка адекватности модельной реконструкции по отношению к данным численного эксперимента, уточнение модели в случае необходимости, расчет вероятности совпадения (Fidelity) между реконструированным и точным состояниями, многократное повторение эксперимента (набор статистики), сравнение точности численных экспериментов с теоретическим предсказанием.

В качестве примера рассмотрим чистое состояние $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, где $|\psi\rangle = (|\xi, \alpha, 0\rangle + 2i|\xi, \alpha, 1\rangle) / \sqrt{5}$ — суперпозиция сдвинутых сжатых фоковских состояний с параметром сдвига $\alpha = 0.5 - 0.7i$ и параметром сжатия $\xi = 0.3 + 0.1i$. Объем выборки n случайных квадратурных данных $\{x_k, \theta_k\}$ в рассматриваемом примере составил 50 тысяч точек (рис. 4.2а). Данные генерировались методом Метрополиса в соответствии с рассчитанным квадратурным распределением $p(x, \theta | \rho) = \langle x, \theta | \rho | x, \theta \rangle$. Алгоритм Метрополиса [127; 128] основан на случайном блуждании точек, распределение которых асимптотически стремится к заданному распределению.

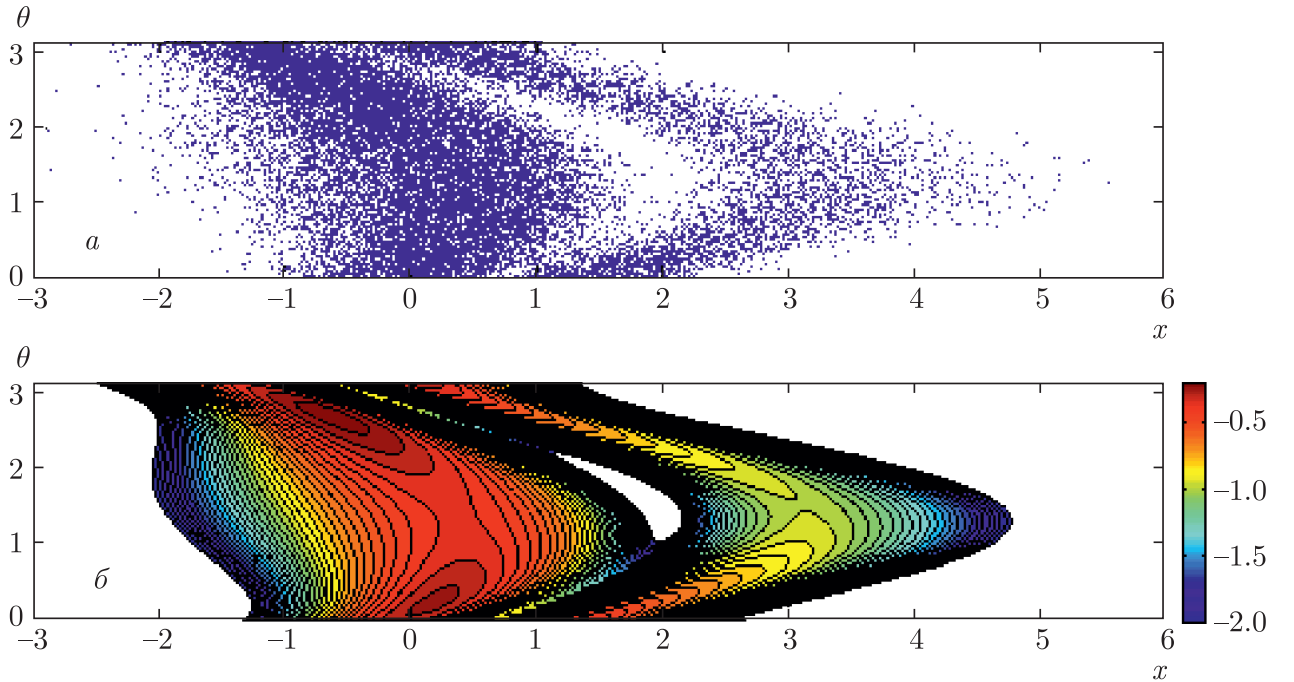


Рисунок 4.2 — Восстановление состояния в сжатом сдвинутом базисе Фока. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б) (представлен десятичный логарифм плотности).

В рассматриваемом примере, для построения адекватной модели в рамках набора сдвинутых сжатых состояний Фока (4.2) достаточно взять только две пер-

вые базисные функции ($s = 2$) и ограничиться рассмотрением только чистых состояний ($r = 1$). Заметим, что адекватность построенной таким образом модели может быть проверена в рамках критерия хи-квадрат [50; 55]. Соответствующий критерий хи-квадрат оценивает степень соответствия между квадратурным распределением, которое отвечает реконструированному состоянию (рис. 4.2б), и исходными данными численного эксперимента (рис. 4.2а). Расчеты показывают, что в рамках стандартного набора фоковских состояний для осуществления успешной реконструкции следует рассмотреть примерно 20 первых состояний ($s = 20$). Заметим также, что стандартный подход предполагает оценку смешанного состояния полного ранга ($r = s = 20$).

Задача максимизации функции логарифмического правдоподобия (4.3) сводится к итерационному решению уравнения правдоподобия (4.6). Заметим, что при использовании сдвинутых сжатых фоковских состояний (4.5) параметры сдвига α и сжатия ξ также варьировались в процессе максимизации функции правдоподобия.

В рассматриваемом примере, восстановленные модифицированным методом максимального правдоподобия параметры сдвига и сжатия, а также вектор состояния составили соответственно: $\alpha_{\text{exp}} = 0.5023 - 0.6956i$, $\xi_{\text{exp}} = 0.3044 + 0.1003i$, $|\psi_{\text{exp}}\rangle = 0.4482 |\xi_{\text{exp}}, \alpha_{\text{exp}}, 0\rangle + (0.0015 + 0.8939i) |\xi_{\text{exp}}, \alpha_{\text{exp}}, 1\rangle$. Вероятность совпадения теоретического и экспериментально восстановленного квантовых состояний оказалась равной $F = |\langle \psi_{\text{exp}} | \psi_{\text{theor}} \rangle|^2 = 0.999968$. Для сравнения заметим, что для тех же самых данных численного эксперимента стандартный подход, основанный на наборе фоковских состояний, обеспечил точность реконструкции только на уровне $F = 0.9970$. Мы видим, что в рассматриваемом примере предложенный в настоящей работе метод позволяет уменьшить потери точности $1 - F$ примерно в 94 раза по сравнению со стандартным методом обработки данных (т.е. получить четыре девятки вместо двух для параметра F). Заметим, что, получая довольно высокие значения точности, такие как $F = 0.9970$, исследователь зачастую может прийти к неверному выводу о том, что точность разработанного им метода реконструкции достаточно велика. В этой связи важно еще до проведения эксперимента иметь адекватную оценку той точности, которую, согласно законам квантовой механики, способен обеспечить тот или иной протокол квантовых измерений. Замечательно, что такие оценки точности квантовых измерений могут быть получены на основе количественного анализа информации

о параметрах квантового состояния, которая содержится в протоколе квантовых измерений [49; 51; 53; 55].

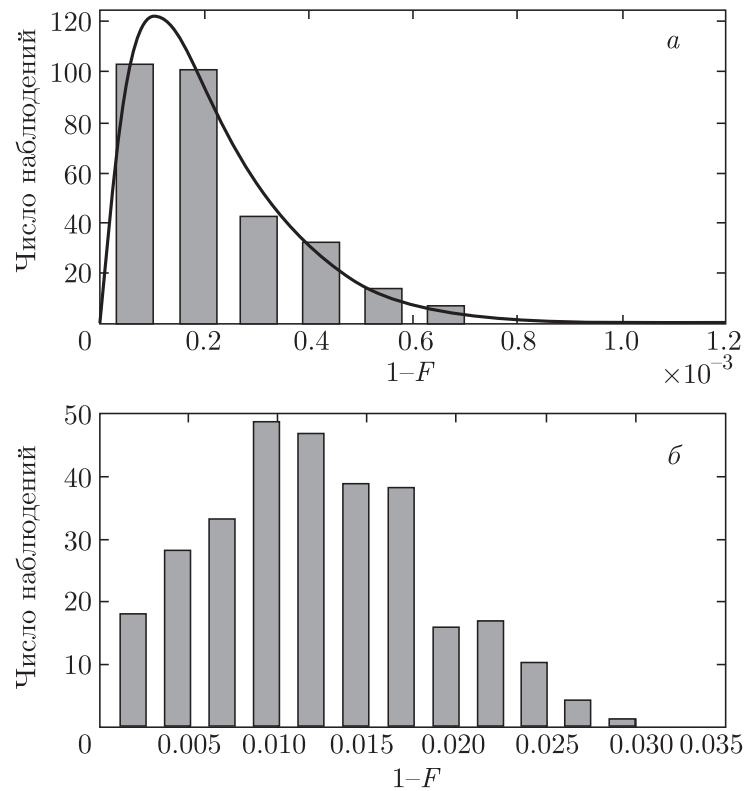


Рисунок 4.3 — Распределения потерь точности восстановления квантового состояния в рамках оптимального базисного набора на основе сжатых сдвинутых состояний Фока (а) и в рамках стандартного набора базисных состояний Фока (б). Гистограммы получены по результатам 300 численных экспериментов.

Сказанное иллюстрирует следующий пример, который отвечает сдвинутому базису Фока с параметром сдвига $\alpha = (1 + i) / \sqrt{2}$. В этом базисе было выбрано следующее состояние $|\psi\rangle = (|\alpha, 0\rangle + i|\alpha, 2\rangle) / \sqrt{2}$, представляющее собой суперпозицию нулевого и второго базисных состояний. Объем выборки в каждом численном эксперименте составил $n = 10000$. Всего было выполнено 300 экспериментов. Рисунок 4.3а иллюстрирует хорошее согласие проведенных экспериментов (гистограмма) с теорией (сплошная кривая). Модель реконструкции отвечала набору сдвинутых фоковских состояний с параметрами $s = 3$, $r = 1$. Теоретическая кривая построена в рамках универсального распределения для точности квантовых измерений [53]. Вид теоретической кривой точности зависит от исходного состояния ρ , от объема выборки n и протокола квантовых измерений. Представленная кривая отвечает протоколу квадратурных измерений, включающему 5000 строк, которые определяются равномерной двумерной сеткой, вклю-

чающей 100 узлов по квадратуре и 50 узлов по углу. Средние потери точности $1 - F$ для распределения на рисунке 4.3а составляют величину, равную 0.000219.

Результаты проведенных экспериментов сравнивались с численными экспериментами, в которых использовалась стандартная версия метода максимального правдоподобия. Стандартная версия предполагает полный ранг матрицы плотности и использование базиса Фока (для рассматриваемого состояния использовалось 10 базисных состояний Фока, $r = s = 10$). Было выполнено также 300 численных экспериментов. В этом случае средние потери точности составили величину, равную 0.0123 (рисунок 4.3б). Мы видим, что использование оптимального базиса и ограничение ранга состояния позволили в рассматриваемом примере повысить точность восстановления примерно в 56 раз.

Следующий пример иллюстрирует восстановление состояния кота Шредингера. Рассматривалась следующая суперпозиция когерентных состояний $|\psi\rangle = N (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) / \sqrt{2}$ [129], где N — нормировочная постоянная, $\alpha = 1 - 2i$.

Особенность этого состояния в том, что оно не может быть точно представлено в рассматриваемом базисе на основе сжатых сдвинутых состояний Фока. Однако соответствующая ошибка аппроксимации может быть сделана сколь угодно малой.

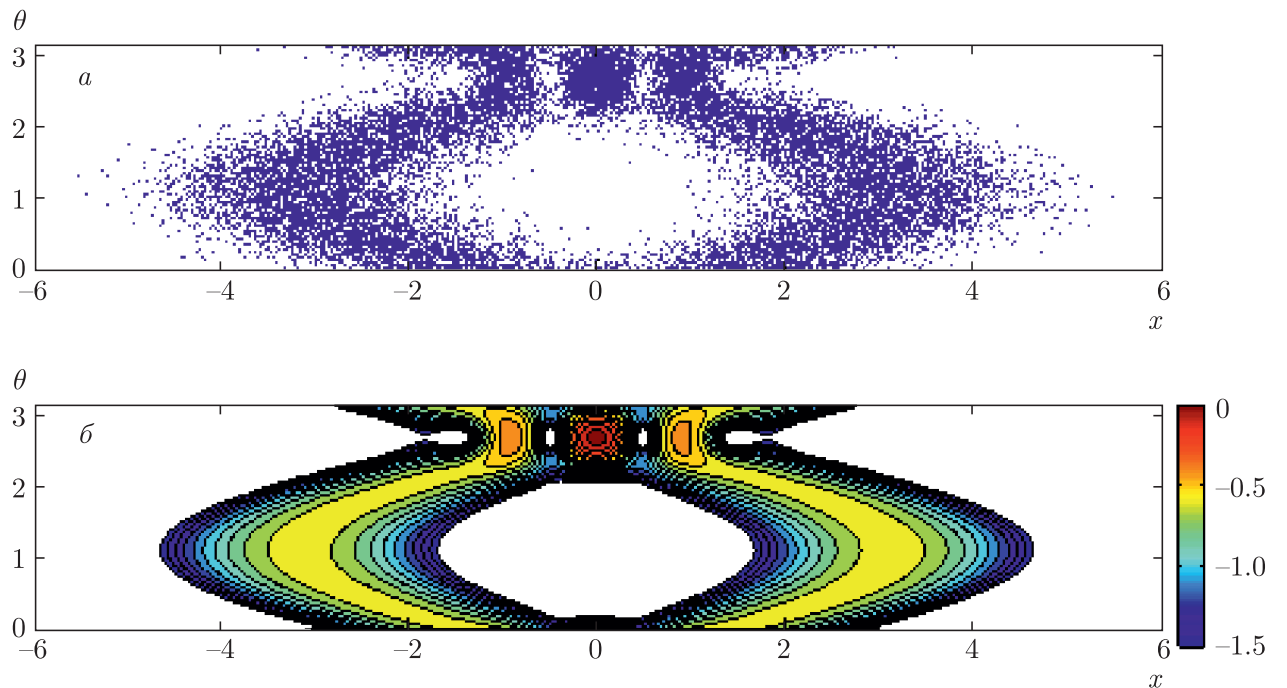


Рисунок 4.4 — Восстановление состояния кота Шредингера. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б). Представлен десятичный логарифм плотности.

На рисунке 4.4 представлены результаты статистического восстановления рассматриваемого квантового состояния в базисе сдвинутых сжатых состояний Фока размерности $s = 10$. При этом восстанавливаемое состояние предполагалось чистым ($r = 1$). Объем выборки в численном эксперименте составил $n = 50000$. Комплексные параметры сжатия и сдвига для базиса, также как и вектор состояния s снова оценивались рассмотренным выше модифицированным методом максимального правдоподобия. Точность оценки квантового состояния составила $F = 0.99985$.

4.3 Выработка адекватной модели квантового состояния с использованием критерия хи-квадрат

Рассмотрим процедуру выработки адекватной модели на основе результатов томографии на примере восстановления состояния кота Шредингера. Пусть задана следующая суперпозиция когерентных состояний [117]:

$$|\psi\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2 \left[1 + \exp(-2|\alpha|^2) \right]}}$$

В рассматриваемом ниже численном примере выбрано значение $\alpha = 2 + i$. Измеряемая совокупность взаимно-дополнительных распределений может быть представлена в виде совокупности кумулятивных функций распределений (рисунок 4.5).

Каждому срезу, соответствующему фазе θ , отвечает своя квадратурная функция распределения $F(x|\theta)$. Возникающая совокупность функций распределения обеспечивает преобразование исходных квадратурных данных (рисунок 4.6, вверху слева) к данным, которые имеют приближенно двумерное равномерное распределение вероятностей (рисунок 4.6, вверху справа). Адекватной модели отвечает высокоточная реконструкция квадратурного распределения (рисунок 4.6, внизу слева). Идентификация неадекватной модели реконструкции может быть осуществлена путем установления факта неравномерности двумерного распределения, возникающего при преобразовании квадратур посредством кумулятивных распределений (рисунок 4.6, внизу справа).

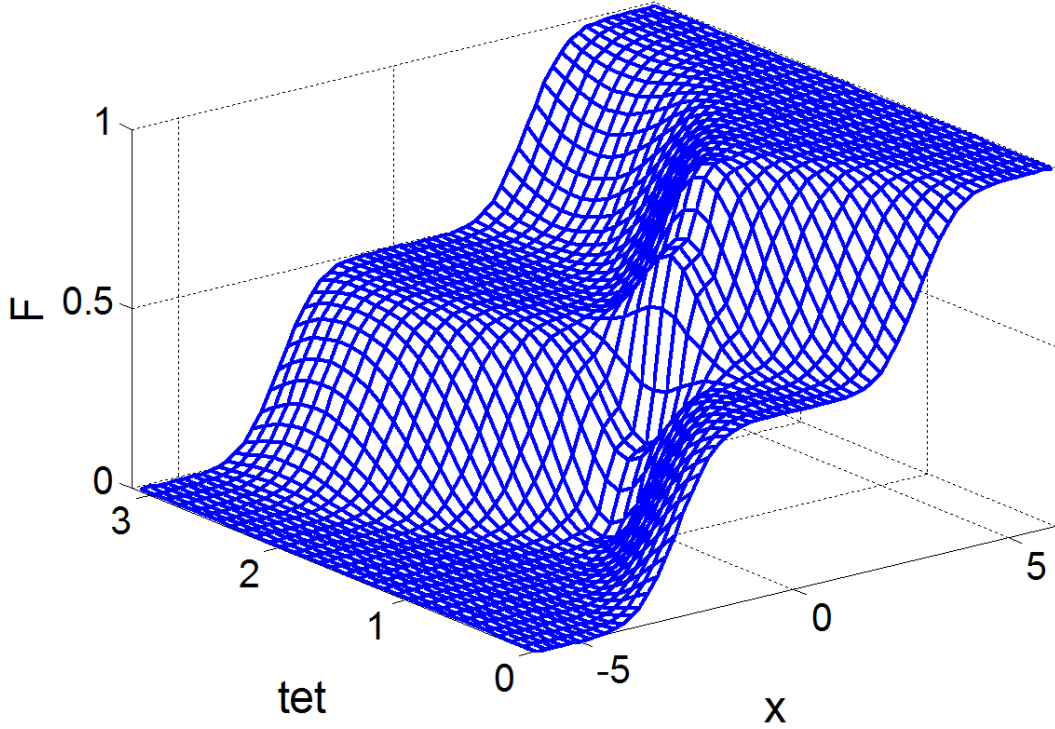


Рисунок 4.5 — Семейство восстановленных кумулятивных функций распределений (размерность гильбертова пространства $s = 7$). Функции распределения позволяют осуществить преобразование квадратурной наблюдаемой x в случайную величину F , которая приближенно имеет равномерное распределение

Таким образом, преобразование квадратурных экспериментальных данных посредством кумулятивных функций распределения позволяет свести рассматриваемую задачу к проверке гипотезы о приближенной однородности возникающего двумерного массива. В настоящей работе проверка гипотезы о равномерности двумерного распределения осуществлялась посредством критерия хи-квадрат.

Параметр хи-квадрат характеризует степень близости между наблюдаемыми частотами событий и их ожидаемыми значениями. Он вычисляется по следующей формуле [130; 131]:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j^{obs} - n_j^{exp})^2}{n_j^{exp}} \quad (4.7)$$

Здесь n_j^{obs} — наблюдаемое число событий, n_j^{exp} — ожидаемое число событий, m — число интервалов группирования.

В нашем случае задавалось $m = m_\theta m_F$ интервалов группирования (m_θ интервалов по переменной θ и m_F интервалов по переменной F). Согласно общим правилам, число степеней свободы ν возникающего распределения хи-квадрат

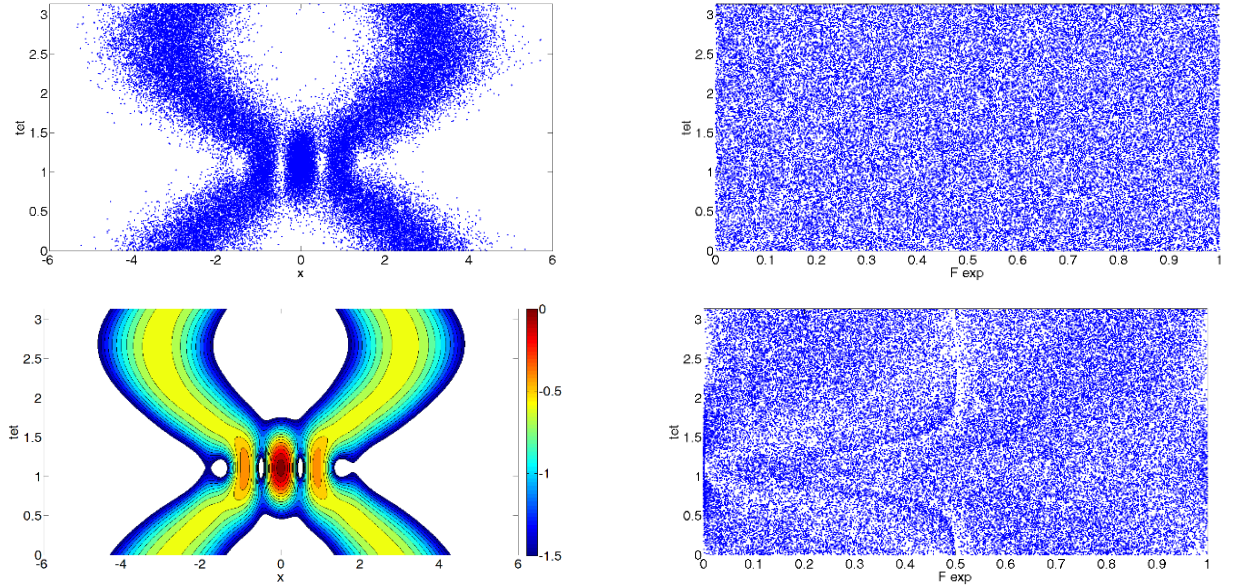


Рисунок 4.6 — Слева сверху — квадратурное распределение (численный эксперимент); слева внизу — реконструированное квадратурное распределение ($s = 7$, $F = 0.999454$), представлен десятичный логарифм плотности; справа сверху — преобразование квадратурной переменной к однородному распределению ($s = 7$), гипотеза об однородности распределения подтверждается критерием хи-квадрат; справа внизу — попытка преобразования квадратурной переменной к однородному распределению ($s = 4$), гипотеза об однородности распределения отвергается критерием хи-квадрат

приблизенно равно числу интервалов группирования m минус число дополнительных условий (ограничений), которые накладываются асимптотически эффективным методом реконструкции (в нашем случае использовалась процедура максимального правдоподобия).

Число степеней свободы ν рассчитывалось по формуле:

$$\nu = m_{\theta}m_F - m_{\theta} - 2s - 2 \quad (4.8)$$

Сделаем некоторые пояснения к представленной формуле. При генерации данных фаза θ равномерно сканировалась в интервале от 0 до π и, таким образом, в каждой фазовой полосе $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ оказывалось одинаковое, априори заданное число точек. Это задавало m_{θ} дополнительных условий, что учтено в правой части (4.8). Можно сказать, что в нашем случае имеется не одно условие нормировки, связанное, как обычно, с заданным общим объемом выборки, а m_{θ} условий нормировки. Далее, в гильбертовом пространстве размерности s чистое состояние задается посредством s комплексных амплитуд ($2s$ действительных парамет-

ров). Однако, набор амплитуд имеет одну несущественную общую фазу (глобальная калибровочная инвариантность) и должен удовлетворять условию нормировки (остается $2s - 2$ действительных параметров). Наконец, нужно учесть ещё, что поиск на основе экспериментальных данных двух комплексных параметров (сдвига и сжатия) задает еще 4 действительных параметра. Таким образом, поиск параметров квантового состояния обуславливает появление $2s - 2 + 4 = 2s + 2$ условий, что и отражено в формуле (4.8). Результаты, представленные ниже, отвечают $m_\theta = 25$, $m_F = 20$. Объем выборки составлял $n = 50000$.

Оказывается, что асимптотически (когда число событий велико) параметр хи-квадрат (4.7) подчиняется хи-квадрат распределению с ν степенями свободы. В этом состоит обобщение на квантовые протоколы известного результата, восходящего к Пирсону и Фишеру [130; 131].

Согласно известным из статистики рекомендациям, число событий в каждом интервале группирования данных должно быть достаточно велико (обычно требуют, чтобы $n_j^{exp} \geq 5$, в нашем случае было $n_j^{exp} \sim 100$).

Важно понимать, что критерий (4.7) применим далеко не ко всем методам оценки квантового состояния, а только к методам, которые обеспечивают асимптотическую оптимальность оценок [130]. К таким методам относится и рассматриваемый здесь метод, основанный на процедуре максимального правдоподобия. Необходимо также, чтобы оценки всех параметров подкреплялись наличием в измерительных данных соответствующей информации.

Реконструкция квантовых состояний осуществлялась на основе исходных данных и, таким образом, не зависела от способа группирования данных. Заметим, что с формальной точки зрения, при оценке параметров состояния для критерия хи-квадрат следует использовать не исходные, а сгруппированные данные [130]. Однако, как показывает анализ и результаты численных экспериментов, в силу большого числа интервалов группирования ($m = 500$), соответствующая неточность не имеет принципиально важного значения.

Количественно адекватность томографического эксперимента мы характеризуем так называемым критическим уровнем значимости α_{crit} , который есть вес хи-квадрат распределения с ν степенями свободы выше точки χ^2 . Модель признается адекватной, если $\alpha_{crit} > \alpha_0$, где α_0 — заданный уровень значимости, который выбирается по усмотрению экспериментатора (в настоящей работе выбиралось $\alpha_0 = 0.01$).

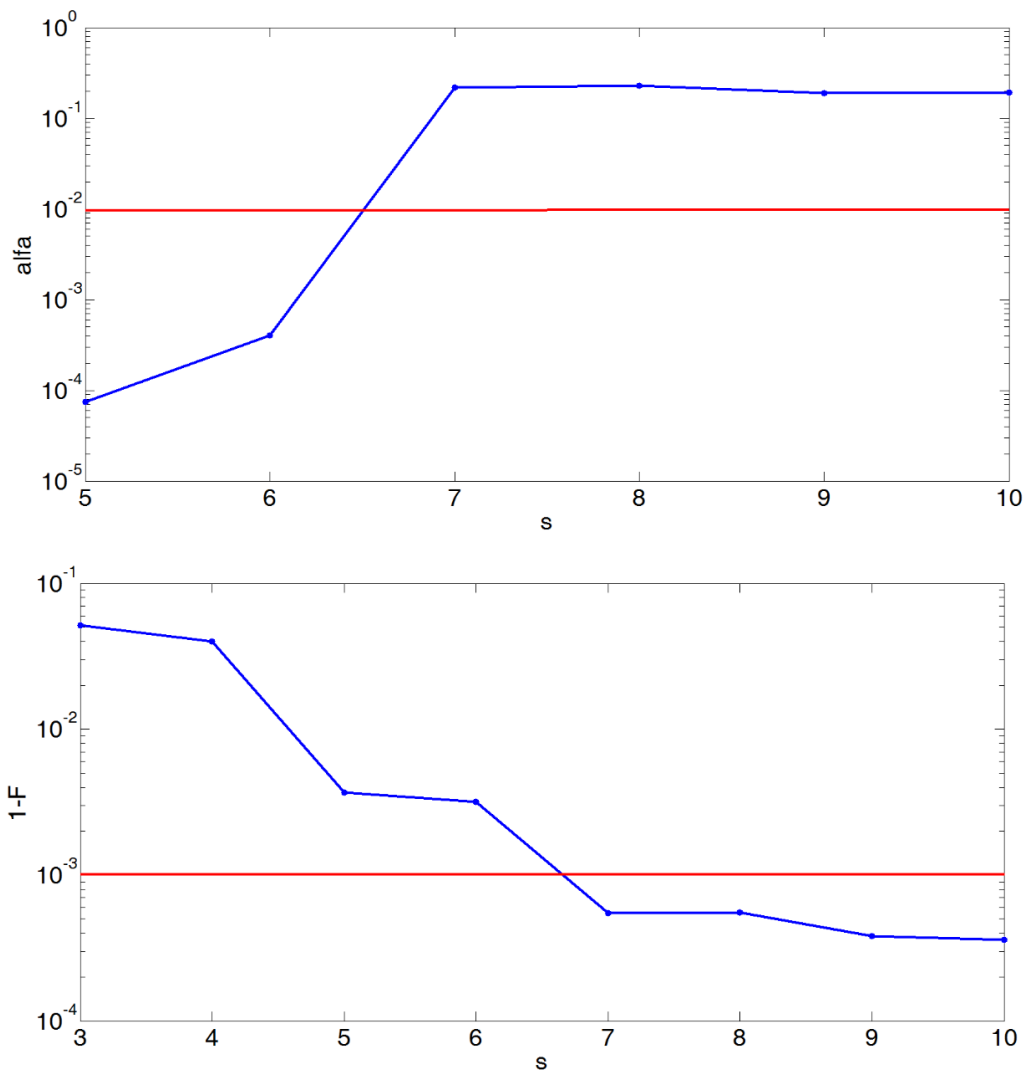


Рисунок 4.7 — Вверху — зависимость уровня значимости от размерности гильбертова пространства (проверка гипотезы об однородности квадратурной переменной, преобразованной посредством кумулятивных функций распределения). Внизу — зависимость потерь точности от размерности гильбертова пространства

Процедура выработки адекватной модели иллюстрируется на рисунке 4.7. На верхнем рисунке представлена зависимость уровня значимости проверяемой гипотезы от размерности гильбертова пространства. Заданному уровню значимости ($\alpha_0 = 0.01$) соответствует горизонтальная линия. Таким образом, адекватными оказываются модели для размерности гильбертова пространства $s = 7$ и выше. На рисунке не представлены размерности $s = 4$ и ниже, т.к. в этом случае уровень значимости α_{crit} оказывается гораздо ниже, чем уровень машинного эпсилон (10^{-16}). Нижний рисунок показывает, что адекватным моделям отвечает существенно более высокая точность реконструкции. Для адекватных моделей с $s = 7 - 10$ имеем $F = 0.9995 - 0.9996$ (точность — три девятки), в то время,

как для $s = 5,6$ имеем только $F = 0.996 - 0.997$ (точность — две девятки), а для $s = 3,4$ — $F = 0.95 - 0.96$ (точность — одна девятка). На рисунке горизонтальная линия соответствует уровню потерь $1 - F = 0.001$.

4.4 Выводы по главе

В настоящей главе рассмотрено статистическое восстановление квантовых состояний на основе оптических квадратурных квантовых измерений с использованием корневого подхода. Построены протоколы квантовых измерений, основанные на тесной связи рассматриваемой задачи с фундаментальным принципом дополнительности Н. Бора и формализмом дробного преобразования Фурье.

Разработаны методы, обеспечивающие существенно более высокую точность восстановления квантовых состояний по сравнению со стандартным подходом, что подтверждается результатами численных экспериментов и теоретического анализа.

Разработан новый метод, направленный на создание адекватных статистических моделей оптических квантовых состояний с использованием технологии квадратурных измерений. Метод включает в себя приближенную аппроксимацию бесконечномерного квантового состояния в рамках оптимальной редуцированной конечномерной модели. Преобразование квадратурных экспериментальных данных посредством кумулятивных функций распределения позволяет свести рассматриваемую задачу к проверке гипотезы о приближенной однородности возникающего двумерного массива.

Критерий хи-квадрат для оценки однородности преобразованных квадратурных данных служит эффективным средством для отбраковки неадекватных моделей. С одной стороны, неадекватными оказываются слишком упрощенные модели, когда число параметров слишком мало для достаточно точного описания данных. С другой стороны, как показывает анализ, неадекватны и слишком сложные модели, когда рост числа параметров не подкрепляется соответствующей информацией в квантовых измерениях. Численные эксперименты показывают, критерий хи-квадрат приводит к идентификации квантового состояния с высокой точностью.

Результаты исследования имеют существенное значение для разработки методов контроля квантовых информационных технологий с прецизионно высокой точностью, близкой к фундаментальному пределу, который определяется законами квантовой физики.

Результаты главы представлены в публикациях [113; 132; 133].

Глава 5. Исследование корреляционных функций высокого порядка с использованием состояний с многофотонным отщеплением и квадратурных измерений

Разработка методов генерации и измерения квантовых состояний света имеет большое значение для задач обеспечения качества и эффективности квантовой криптографии и квантовых информационных технологий в целом [134]. Долгое время для квантово-информационных задач использовались, в основном, дискретные степени свободы света, реализованные на основе поляризационных и фазовых кубитов. Уже в этом случае для восстановления квантового состояния необходимо провести достаточно большое число различных проекционных измерений, и каждое измерение нужно повторить много раз, чтобы набрать достаточную статистику [49; 83; 85]. Для увеличения размерности передаваемых квантовых состояний можно переходить к парам коррелированных фотонов (кутриты и кукварты [20; 50; 101]), однако далее увеличивать размерность таким образом сложно, поскольку даже генерация трехфотонных состояний уже представляет сложную экспериментальную задачу, которая пока не имеет хорошего технологического решения [26; 135]. Поэтому в последнее время все большей популярностью пользуется кодирование квантовой информации в непрерывных переменных электромагнитного поля: в пространственных модах [136—138], в частотно-временных модах [139; 140] и в квадратурных состояниях [141].

Последний вариант особенно интересен тем, что в отличие от других случаев информация передается не фоковскими состояниями света с заданным числом фотонов, а состоянием с произвольным распределением по числу фотонов. Собственно, параметры этого распределения и являются носителями информации. Однако, для полного восстановления квадратурных состояний недостаточно лишь измерить статистику фотоотсчетов – необходимо измерять квадратурные распределения. Как правило, для этого используют технику гомодинного детектирования [142].

Экспериментально были получены и измерены самые разнообразные квадратурные состояния, среди которых когерентные, фоковские, тепловые, сжатые и др. [119]. Строго говоря, размерность таких состояний бесконечна, поэтому измерение и восстановление таких состояний является сложной задачей, требующей адекватного разумного подхода к ограничению размерности [55; 113].

В настоящей работе мы рассмотрим состояния, описывающиеся как смесь фоковских состояний. Среди них наиболее часто встречающимся в природе является тепловое состояние, в котором фоковские состояния имеют больцмановское распределение по энергии. Для генерации оптического аналога такого состояния достаточно выделить одну пространственную и частотно-временную моду от теплового источника. Для увеличения интенсивности и времени когерентности подобных состояний используют квази-тепловые источники, в которых лазерное излучение пропускается через вращающийся матовый диск [143; 144]. Эффективная температура такого излучения определяется мощностью лазера, а время когерентности – временем прохождения характерной неоднородности диска через сечение оптического пучка (фактически это время может изменяться от нескольких мкс до нескольких секунд).

Несмотря на то, что тепловые состояния света являются практически классическими объектами, они обладают квантовыми корреляциями, в частности их нормированная автокорреляционная функция в нуле $g^{(2)}(0) = 2$. Это замечательное свойство позволяет использовать такие поля в тех же приложениях, в которых себя хорошо зарекомендовали бифотонные поля. Среди них призрачное изображение (ghost imaging) [145—147], квантовое освещение (quantum illumination) [148; 149], оптическая когерентная томография [150; 151]. Для таких полей также справедливо разложение Шмидта для пространственных мод [152].

Интересной модификацией являются условные тепловые состояния, к которым добавили или из которых удалили один или несколько фотонов [153—155]. Отщепление фотона реализуется посредством прохождения света через светоделитель со слабым коэффициентом отражения, а добавление – посредством прохождения пучка через кристалл, в котором в неколлинеарном режиме происходит генерация бифотонов. В обоих случаях процесс отщепления и добавления фотона является случайным и сопровождается фото-отсчетом в детекторе, стоящем в сопряженном канале. Такие манипуляции могут существенно изменить статистическое распределение фотонов и даже (в случае добавления фотона) сделать состояние света неклассическим.

Настоящая глава посвящена изучению статистики фотонов в тесной связи с квадратурными квантовыми измерениями. Представлен общий подход к описанию статистики фотонов и их корреляций на основе так называемого компаунд-распределения Пуассона, находящего важные применения в микроэлектронике [156]. Развитый подход применяется к описанию условных распределений, отве-

чающих отщеплению фотонов. Посредством измерения квадратурных распределений осуществлено детальное экспериментальное исследование соответствующих оптических квантовых состояний.

5.1 Производящие и корреляционные функции

В основе нашего исследования лежит математический аппарат производящих функций [157]. Важно, что производящая функция $G(z)$ содержит в себе полную информацию о случайном числе фотонов. В частности, вероятность того, что будет зарегистрировано ровно k фотонов выражается через k -ую производную $G^{(k)}(0)$ от производящей функции в точке $z = 0$, а так называемый m -ый факториальный момент $E[k(k-1)\dots(k-m+1)]$ выражается через m -ую производную $G^{(m)}(1)$ производящей функции в точке $z = 1$.

$$P(k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

$$E[k(k-1)\dots(k-m+1)] = G^{(m)}(1)$$

Здесь символ E обозначает операцию усреднения. Автокорреляционная функция m -го порядка, регистрируемая в схеме совпадения отсчетов от m детекторов фотонов, непосредственно определяется соответствующим факториальным моментом и может быть выражена через m -ую производную производящей функции в точке $z = 1$.

$$g^{(m)} = \frac{G^{(m)}(1)}{\mu^m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь $\mu = G^{(1)}(1)$ — среднее число фотонов в исходном состоянии. Заметим, что всегда $g^{(1)} = 1$.

Для отщепления фотона используется делитель пучка с малым коэффициентом отражения p . Посредством постселекции выделяются только те представители ансамбля, в которых был отщеплен фотон. Таким образом, рассматриваются условные распределения числа фотонов (при условии, что был отщеплен фотон). Представители статистического ансамбля, в которых не был отщеплен фотон, просто отбрасываются. Вероятность того, что на вход делителя поступит k фотонов равна $P(k)$, при этом ровно один отразится с вероятностью $kp(1-p)^{k-1}$. Итоговая вероятность получить состояние с $k-1$ фотоном равна

$N \cdot P(k) k p (1-p)^{k-1}$, где N — нормировочный множитель. Таким образом, исходная зависимость от числа фотонов k в распределении $P(k)$ изменяется посредством множителя $k(1-p)^{k-1}$. Заметим, что при исчезающе малых $p \rightarrow 0$ учитывать следует только множитель k , поскольку в этом случае $(1-p)^{k-1} \rightarrow 1$. На языке операторов уничтожения a и рождения a^+ вычитание фотона приводит к следующему преобразованию матрицы плотности:

$$\rho^{out} = N a \rho^{in} a^+,$$

где N — нормировочный множитель.

Опираясь на представленные выше соображения, можно показать, что при исчезающе малом коэффициенте отражения $p \rightarrow 0$ производящая функция $G_1(z)$ распределения, отвечающего отщеплению одного фотона, определяется первой производной $G^{(1)}(z)$ от производящей функции исходного распределения:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z)}{G^{(1)}(1)} = \frac{G^{(1)}(z)}{\mu} \quad (5.1)$$

Можно также показать, что при конечном коэффициенте отражения $0 < p < 1$ представленная формула модифицируется следующим образом:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z(1-p))}{G^{(1)}(1-p)}$$

Последовательное применение формулы 5.1 приводит к общему выражению для производящей функции $G_m(z)$, отвечающей отщеплению m фотонов:

$$G_m(z) = \frac{G^{(m)}(z)}{\mu \mu_1 \cdots \mu_{m-1}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь μ_1, μ_2 и т.д. — средние значения для состояний с отщеплением соответственно одного, двух и более фотонов. Последовательное измерение этих величин позволяет нам получить корреляционные функции произвольного порядка:

$$g^{(m)} = \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{m-1}}{\mu^{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что корреляционная функция второго порядка определяется отношением среднего μ_1 для состояния с отщеплением одного фотона к среднему μ исходного состояния:

$$g^{(2)} = \frac{\mu_1}{\mu}$$

Мы видим также, что в общем случае имеется следующая рекуррентная связь, позволяющая выразить корреляционную функцию $m + 1$ -го порядка через корреляционную функцию m -го порядка:

$$g^{(m+1)} = g^{(m)} \frac{\mu_m}{\mu}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Важно отметить, что корреляционные характеристики условных состояний, возникающих при отщеплении фотонов, могут быть выражены через корреляции исходного состояния. Можно показать, что корреляционная функция n -го порядка для распределения с отщеплением m фотонов $g_m^{(n)}$ может быть выражена через корреляционные функции исходного распределения:

$$g_m^{(n)} = \frac{G_m^{(n)}(1)}{\mu_m^n} = \frac{g^{(m+n)} (g^{(m)})^{n-1}}{(g^{(m+1)})^n}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

5.2 Сжатый вакуум: производящие и корреляционные функции

В качестве примера приложения разработанного подхода рассмотрим так называемое состояние сжатого вакуума [158].

Производящая функция $G(z)$ для распределения фотонов в состоянии сжатого вакуума есть:

$$G(z) = \frac{1}{\cosh(r) \sqrt{1 - z^2 \tanh^2(r)}}$$

Здесь r — параметр сжатия. Соответствующее распределение вероятностей, порожаемое представленной производящей функцией, отлично от нуля только в четных точках:

$$P(2n) = \frac{1}{\cosh(r)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2} \tanh(r) \right)^{2n}, \quad P(2n+1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Среднее число фотонов μ в состоянии сжатого вакуума есть:

$$\mu = G^{(1)}(1) = \sinh^2(r)$$

Производящая функция для условного распределения, возникающего при отщеплении одного фотона, есть:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z)}{\mu} = \frac{z}{\cosh^3(r) (1 - z^2 \tanh^2(r))^{3/2}}$$

Среднее число фотонов μ_1 в состоянии с одним отщепленным фотоном соответственно есть:

$$\mu_1 = G_1^{(1)}(1) = 1 + 3\sinh^2(r)$$

Из полученных выражений следует, что вторая корреляционная функция $g^{(2)}$ есть:

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}(1)}{\mu^2} = \frac{\mu_1}{\mu} = 3 + \frac{1}{\sinh^2(r)}$$

Аналогично находим, что:

$$G^{(3)}(1) = 15\sinh^6(r) + 9\sinh^4(r),$$

$$g^{(3)} = 15 + \frac{9}{\sinh^2(r)}$$

Можно показать, что факториальные моменты и корреляции произвольного порядка $n = 1, 2, \dots$ определяются следующими общими формулами (суммы содержат конечное число элементов):

$$G^{(n)}(1) = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} (\sinh^2(r))^{(n-k)}$$

$$g^{(n)} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \left(\frac{1}{\sinh^2(r)} \right)^k$$

Здесь $E(n/2)$ — целая часть числа $n/2$.

Развитая нами теория может быть приложена также к более общему случаю сжатого когерентного состояния.

Представленные выше аналитические формулы подтверждаются численными расчетами.

На рисунке 5.1 представлен для примера случай $r = 1.6$

5.3 Компаунд-распределение Пуассона

Для распределения Пуассона с параметром среднего λ производящая функция есть:

$$G_0(z|\lambda) = \exp(-\lambda(1-z)) \quad (5.3)$$

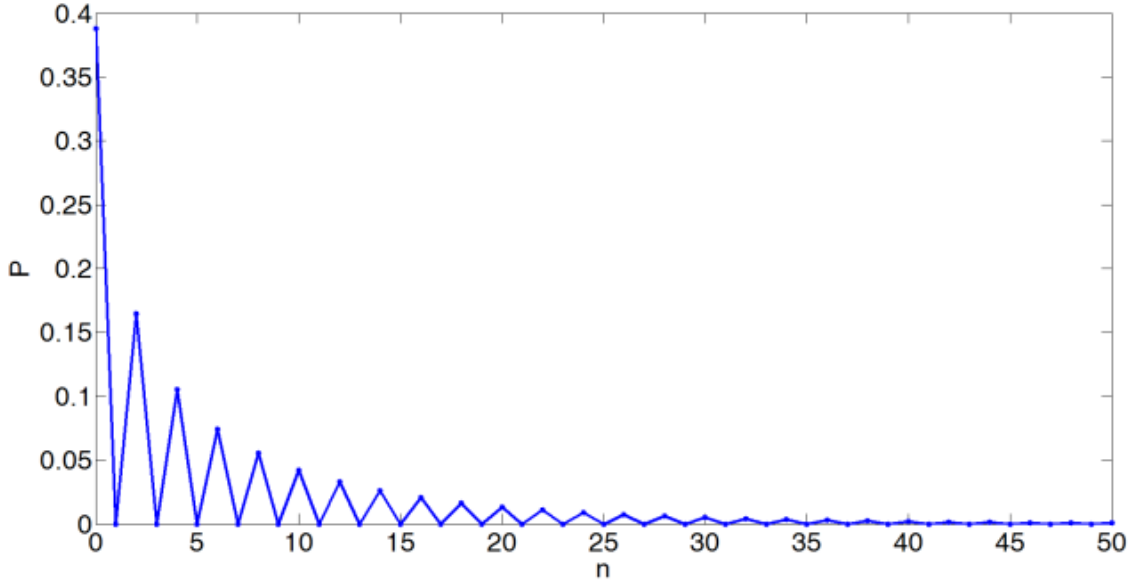


Рисунок 5.1 — Распределение числа фотонов сжатого состояния при $r = 1.6$

Предположим, что параметр распределения Пуассона λ сам является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с плотностью вероятности:

$$P(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)},$$

где $a > 0, b > 0$. Здесь $\Gamma(a)$ — гамма-функция. Рассматриваемая смесь распределений имеет следующую производящую функцию:

$$G(z|a, b) = \int_0^\infty G_0(z|\lambda) P(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\left(1 + \frac{(1-z)}{b}\right)^a} \quad (5.4)$$

Полученное распределение характеризуется средним $\mu = a/b$ и может быть переписано в следующем виде:

$$G(z|\mu, a) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu(1-z)}{a}\right)^a} \quad (5.5)$$

Таким образом, компаунд-распределение Пуассона [156] определяется двумя параметрами: μ — среднее число фотонов, a — параметр кластеризации (группировки) фотонов. Этот параметр может быть также назван параметром когерентности: чем выше a , тем ближе рассматриваемое распределение к обычному распределению Пуассона, которое отвечает когерентному состоянию. Действительно, нетрудно видеть, что при $a \rightarrow \infty$ формула дает производящую функцию для распределения Пуассона с параметром μ . Случай $a = 1$ отвечает тепловому

состоянию. Заметим, что учет оптических потерь приводит к тому, что соответствующее среднее число фотонов просто умножается на постоянный множитель: $\mu \rightarrow \mu t$, где t — коэффициент прохождения, $t = 1 - \gamma$, γ — доля поглощенной энергии излучения. Интересно отметить также, что распределение является осмысленным не только при $a > 0$, но и при отрицательных целых числах $a = -n$, где $n = 1, 2, \dots$. Такие распределения могут служить для описания n -фотонных состояний при условии, что $0 < \mu \leq n$. Случай $\mu = n$ соответствует ситуации, когда было приготовлено ровно n фотонов, случай $\mu < n$ можно интерпретировать как ситуацию, когда некоторые из n фотонов были потеряны с определенной конечной вероятностью в результате декогерентизации. В этом случае распределение сводится к биномиальному распределению с вероятностью $\theta = \frac{\mu}{n}$ выживания фотона и описывает вероятность того, что из n фотонов выживет ровно k фотонов. Основываясь на формулах раздела 5.1, нетрудно показать, что автокорреляционная функция произвольного m -го порядка для компаунд-распределения Пуассона дается следующим выражением:

$$g^{(m)} = \frac{(a)_m}{a^m} = \frac{a(a+1) \dots (a+m-1)}{a^m}$$

Здесь $(a)_k$ — произведение из k множителей:

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$$

В частности: $g^{(2)} = \frac{a+1}{a}$, $g^{(3)} = \frac{(a+1)(a+2)}{a^2}$, $g^{(4)} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{a^3}$.

Например, $g^{(2)} = 2$ для $a = 1$ (тепловой источник); $g^{(2)} = 0$ для $a = -1$ (однофотонное состояние); $g^{(2)} = 1$ при $a \rightarrow \infty$ (когерентное состояние). Основываясь на 5.1, нетрудно показать, что условное состояние, возникающее при отщеплении фотона, обладает следующим замечательным свойством: тип распределения не меняется, не меняется также параметр b , а параметр a изменяется по следующему простому правилу:

$$a^{(1)} = a + 1 \tag{5.6}$$

На основе 5.6 и инвариантности b получаем правило для преобразования среднего числа фотонов.

$$\mu^{(1)} = \frac{\mu(a+1)}{a}$$

Здесь $a^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ — параметры a и μ после отщепления фотона. При отщеплении k фотонов получаем:

$$a^{(k)} = a + k$$

$$\mu^{(k)} = \frac{\mu(a+k)}{a}$$

Для теплового источника $a = 1$, поэтому

$$a^{(k)} = 1 + k, \quad \mu^{(k)} = \mu(1 + k)$$

В частности $\mu^{(1)} = 2\mu$ (при отщеплении одного фотона среднее число фотонов возрастает вдвое). Такое увеличение среднего числа фотонов не таит в себе какого-либо парадокса. Действительно, в данном случае речь идет не об исходном, а об условном распределении. Для каждого представителя исходного распределения вероятность попадания в выборку из условного распределения тем выше, чем больше фотонов содержит данный представитель. Факт регистрации фотона с одной стороны говорит о том, что фотонов после делителя стало на один меньше, чем было до делителя. Но с другой стороны, отщепление и регистрация фотона происходит чаще для тех групп, в которых фотонов на входе было больше, чем в среднем (для таких групп соответственно больше фотонов и на выходе). В случае тепловых состояний этот второй фактор имеет решающее значение.

5.4 Квадратурное измерение состояний

В случае компаунд-распределения Пуассона $P(k|\mu, a)$ квадратурная матрица плотности есть:

$$\rho(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\mu, a) \varphi_k(x) \varphi_k^*(x')$$

Здесь $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — собственные функции гармонического осциллятора, задающие базисный набор функций Чебышева—Эрмита [159]. Явный вид рассматриваемых функций дается следующей формулой

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующее квадратурное распределение есть:

$$P(x|\mu, a) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\mu, a) |\varphi_k(x)|^2 \quad (5.7)$$

Распределение является симметричным относительно начала координат, поэтому все его нечетные моменты равны нулю.

Можно показать, что дисперсия квадратуры x в распределении 5.7 не зависит от параметра a и дается следующей формулой:

$$\sigma^2 = \mu + \frac{1}{2}$$

Для полученного распределения могут быть аналитически вычислены и моменты более высокого порядка. В частности, асимметрия (skewness) β_1 тождественно равна нулю ($\beta_1 = 0$), а эксцесс (excess) β_2 распределения может быть вычислен по формуле:

$$\beta_2 = -6 \left(\frac{\mu}{2\mu + 1} \right)^2 \frac{(a - 1)}{a}$$

Напомним, что для случайной величины x рассматриваемые характеристики, по определению, есть

$$\beta_1 = \frac{M \left[(x - M(x))^3 \right]}{\sigma^3}$$

$$\beta_2 = \frac{M \left[(x - M(x))^4 \right]}{\sigma^4} - 3$$

Если измерить экспериментально дисперсию σ^2 квадратуры и ее эксцесс β_2 , то на основе представленных выше формул можно оценить среднее число фотонов μ и параметр их группировки a :

$$\mu = \sigma^2 - \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

$$a = \frac{6\mu^2}{6\mu^2 + \beta_2(2\mu + 1)^2} \quad (5.9)$$

Формулы (5.8 и 5.9) составляют основу метода моментов для оценки параметров распределения μ и a . В настоящем исследовании оценки (5.8 и 5.9) использовались в качестве нулевого приближения для более совершенных оценок по методу максимального правдоподобия [55; 113].

Было приготовлено и измерено 11 состояний: тепловое и с отщеплением от 1 до 10 фотонов. Результаты представлены в таблице 6.

Из 5.2 следует, что произведение всех средних в таблице определяет корреляционную функцию теплового поля 11-го порядка: $g^{(11)} = \frac{\prod_{m=1}^{10} \mu_m}{\mu^{10}}$. Согласно таблице, натуральный логарифм рассматриваемой величины есть $\ln g^{(11)} = 17.53 \pm 0.10$ (теоретическое значение равно $\ln 11! = 17.50$).

Таблица 6 — Результаты томографии тепловых состояний после отщепления фотонов

отщеплено фотонов	μ	a	размер выборки	фиделити	уровень значимости
$m = 0$	3.034 ± 0.022	0.999 ± 0.016	50000	99.999	0.37
$m = 1$	5.983 ± 0.051	1.605 ± 0.036	25000	99.659	0.112
$m = 2$	9.063 ± 0.093	2.515 ± 0.088	12500	99.777	0.55
$m = 3$	12.261 ± 0.150	3.149 ± 0.147	7500	99.572	0.014
$m = 4$	15.538 ± 0.223	4.331 ± 0.281	4500	99.799	0.565
$m = 5$	17.957 ± 0.244	5.198 ± 0.350	4500	99.831	0.111
$m = 6$	21.050 ± 0.362	6.378 ± 0.600	2500	99.928	0.214
$m = 7$	24.732 ± 0.410	7.045 ± 0.665	2500	99.832	0.021
$m = 8$	27.795 ± 0.433	8.847 ± 0.882	2500	99.945	0.207
$m = 9$	30.536 ± 0.999	11.259 ± 2.680	500	99.896	0.021
$m = 10$	33.114 ± 1.267	11.337 ± 3.156	358	99.98	0.123

5.4.1 Доверительные области оценок

Поскольку метод максимального правдоподобия используется нами для оценки двух взаимозависимых параметров, индивидуальные доверительные интервалы параметров неполно описывают точность оценок. Для того чтобы полностью охарактеризовать дисперсию полученных оценок были построены доверительные области совместного распределения оценок параметров.

Для определения доверительных областей параметров мы пользуемся тем фактом, что такие оценки асимптотически распределены согласно нормальному распределению:

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{mle} - \theta_0 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \mathcal{I}^{-1} \right),$$

где $\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ a \end{bmatrix}$ — вектор параметров, а $\mathcal{I}$ — матрица информации Фишера.

Таким образом, для определения доверительных интервалов необходимо численно оценить матрицу информации Фишера для функции правдоподобия $\mathcal{L}$, соответствующей квадратурному распределению вероятности (5.7):

$$\left(\mathcal{I} \left(\hat{\theta} \right) \right)_{i,j} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \mathcal{L} \left(\theta | x \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \mathcal{L} \left(\theta | x \right) \right) \middle| \hat{\theta} \right].$$

В качестве сводных оценок точности можно использовать диагональные элементы полученной матрицы:

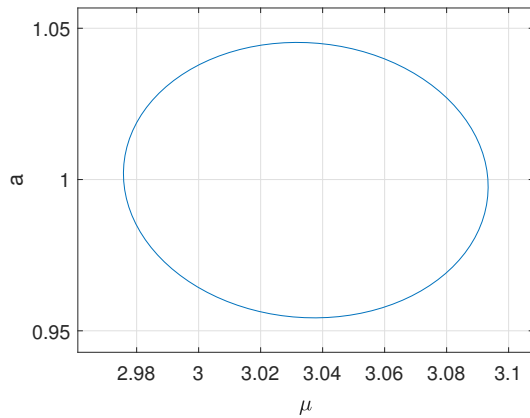
$$\hat{\theta}_i \pm v_c \sqrt{\frac{1}{n} \left(\mathcal{I}(\hat{\theta})^{-1} \right)_{ii}},$$

где v_c — критическое значение нормального распределения, соответствующее интересующему значению вероятности. Эти интервалы при $v_c = 1$ приведены в таблице 6.

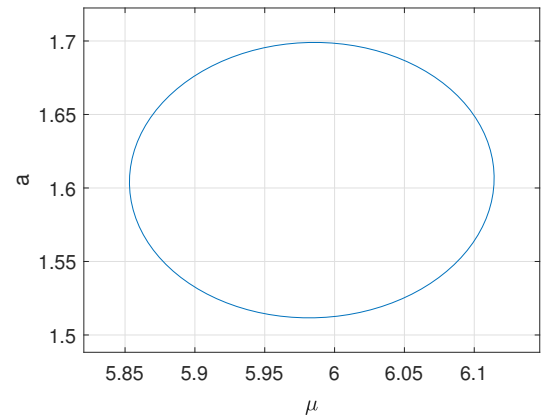
Более полной характеристикой точности являются доверительные области. Для нормального распределения они задаются следующим неравенством:

$$(\theta - \hat{\theta})^T \mathcal{I}(\hat{\theta}) (\theta - \hat{\theta}) < Q_{\chi^2_2}(p),$$

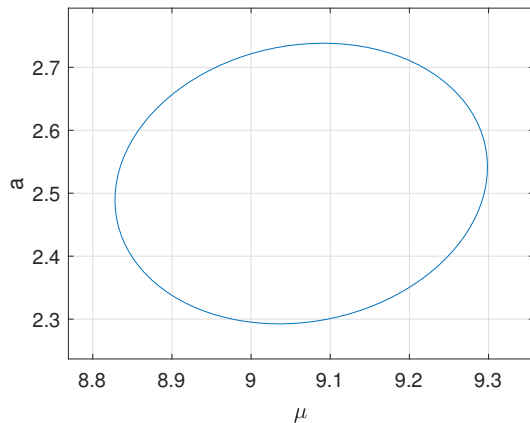
где $Q_{\chi^2_2}(p)$ — значение обратной функции распределения для хи-квадрат с двумя степенями свободы на интересующем уровне вероятности. 95% доверительные области полученных оценок изображены на рисунках 5.2–5.4.



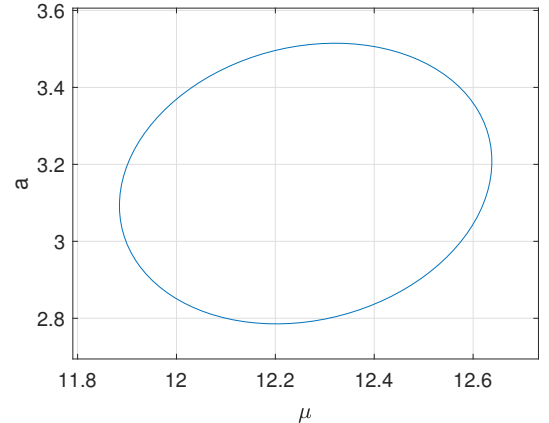
а) без отщепления



б) отщепление 1 фотона

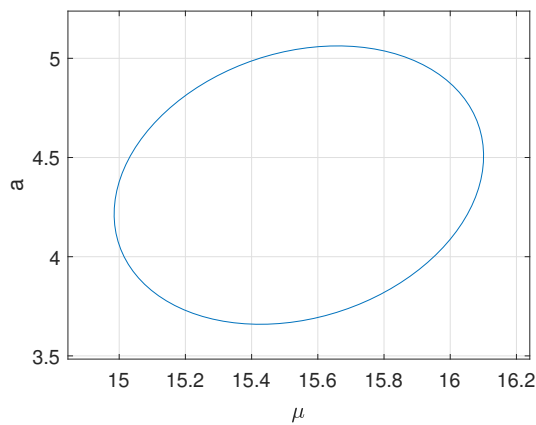


в) отщепление 2 фотонов

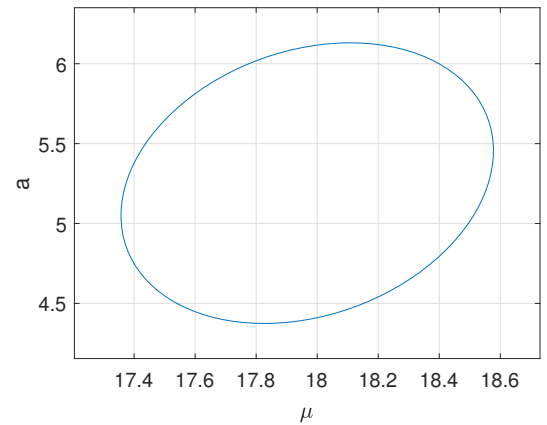


г) отщепление 3 фотонов

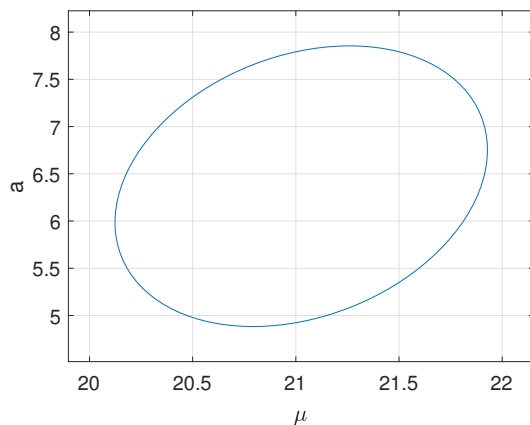
Рисунок 5.2 — 95 % доверительные области оценок при отщеплении до 3 фотонов



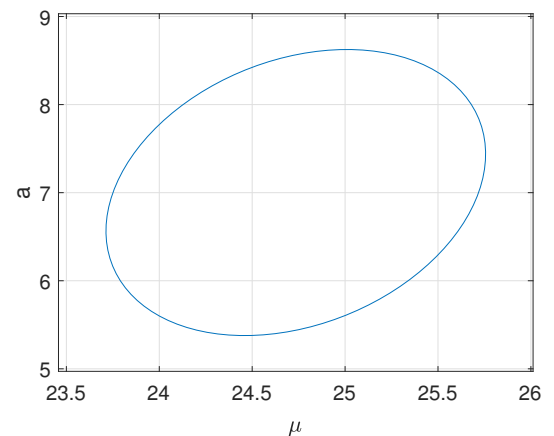
а) отщепление 4 фотонов



б) отщепление 5 фотонов



в) отщепление 6 фотонов

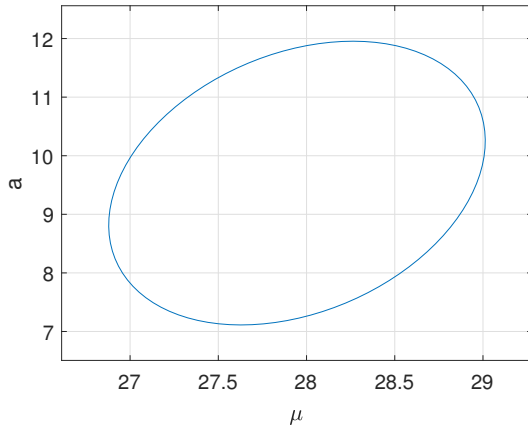


г) отщепление 7 фотонов

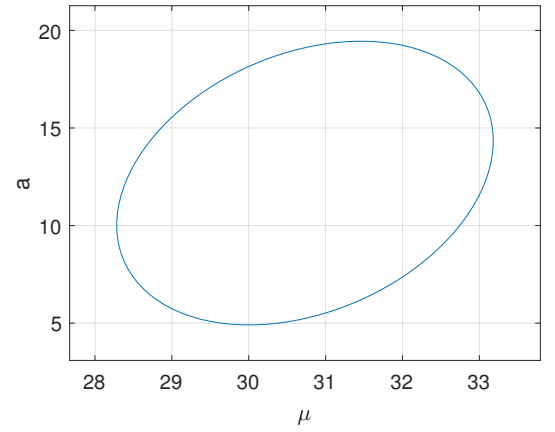
Рисунок 5.3 — 95 % доверительные области оценок при отщеплении от 4 до 7 фотонов

5.5 Многоуровневая иерархия компаунд-распределений Пуассона

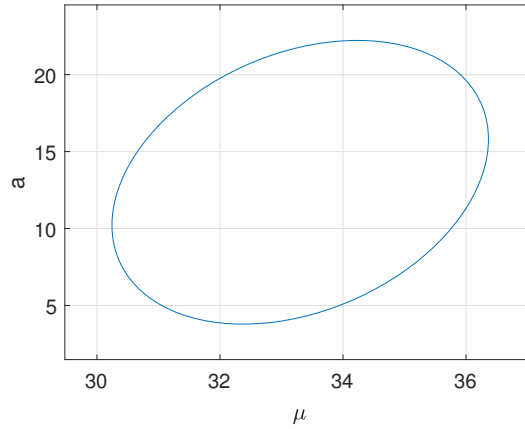
В разделе 5.3 мы предположили, что параметр среднего λ в распределении Пуассона становится нестабильной (случайной) величиной. Стабилизация среднего была достигнута путем усреднения по гамма-распределению, что привело нас к компаунд-распределению Пуассона (5.4 и 5.5). Однако, полученное таким образом распределение является только распределением первого уровня (если считать исходное распределение Пуассона распределением нулевого уровня). Если предположить, что среднее значение μ в компаунд-распределении Пуассона (5.4 и 5.5) само является нестабильной (случайной) величиной по аналогии с многоуровневым распределением введенным в работе [156], то можно прийти к распределениям второго и более высоких уровней. Физическая причина возникновения таких распределений следующая. Стабилизация среднего значения внут-



а) отщепление 8 фотонов



б) отщепление 9 фотонов



в) отщепление 10 фотонов

Рисунок 5.4 — 95 % доверительные области оценок при отщеплении от 8 до 10 фотонов

ри кадра с конечной длительностью экспозиции τ является неполной. Различные кадры формируются, вообще говоря, в различных условиях и при рассмотрении совокупности таких кадров нужно учитывать их неоднородность (вариации среднего от кадра к кадру). Подобные вариации можно учесть в модели 2-го уровня. Различные группы кадров также могут быть неоднородны между собой, что будет приводить к модели 3-го уровня и т.д.

Формализуем описание рассматриваемой иерархии распределений. Представим компаунд-распределение Пуассона первого уровня - в следующем виде:

$$G_1(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{(1-z)}{b_1}\right)^{a_1}} = \left(1 + \frac{(1-z)}{b_1}\right)^{-\mu b_1} = \exp \left[-\mu b_1 \ln \left(1 + \frac{(1-z)}{b_1}\right) \right] \quad (5.10)$$

Предположим теперь, что среднее значение μ в 5.10 становится случайной величиной, при этом будем считать, что параметр b_1 остается константой ($b_1 = \text{const}$). Если предположить далее, что нестабильность μ описывается гамма-

распределением с параметрами a_2 и b_2 , то возникнет переход от модели 1-го уровня к модели второго уровня. Заметим, что переход от исходного распределения Пуассона нулевого уровня 5.3 к распределению первого уровня 5.10 может быть осуществлен следующей простой формальной заменой:

$$(1 - z) \rightarrow b_1 \ln \left(1 + \frac{(1 - z)}{b_1} \right)$$

Тогда, усредняя выражение 5.10 с использованием гамма-распределения с параметрами a_2 и b_2 , получим для производящей функции компаунд- распределения Пуассона 2-го уровня:

$$G_2(z | \mu, b_1, b_2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{b_1}{b_2} \ln \left(1 + \frac{(1-z)}{b_1} \right) \right)^{\mu b_2}}$$

Здесь μ - общее (генеральное) среднее значение, b_1 и b_2 — параметры, относящиеся к 1-му и 2-му уровням иерархии соответственно. Можно также ввести параметры группировки на соответствующих уровнях, считая, по определению, что $a_1 = \mu b_1$, $a_2 = \mu b_2$. Отметим, что при $a_2 \rightarrow \infty$, $b_2 \rightarrow \infty$, $a_2/b_2 = \mu = \text{const}$ модель второго уровня переходит в модель первого уровня. Заметим, что осуществляя описанную процедуру последовательно, можно получить следующие формулы для иерархической цепочки распределений. Производящая функция r -го уровня определяется формулой

$$G_r(z | \mu, b_1, \dots, b_r) = \exp[-\mu L_r],$$

где значения функции L задаются рекуррентным образом:

$$L_0 = (1 - z),$$

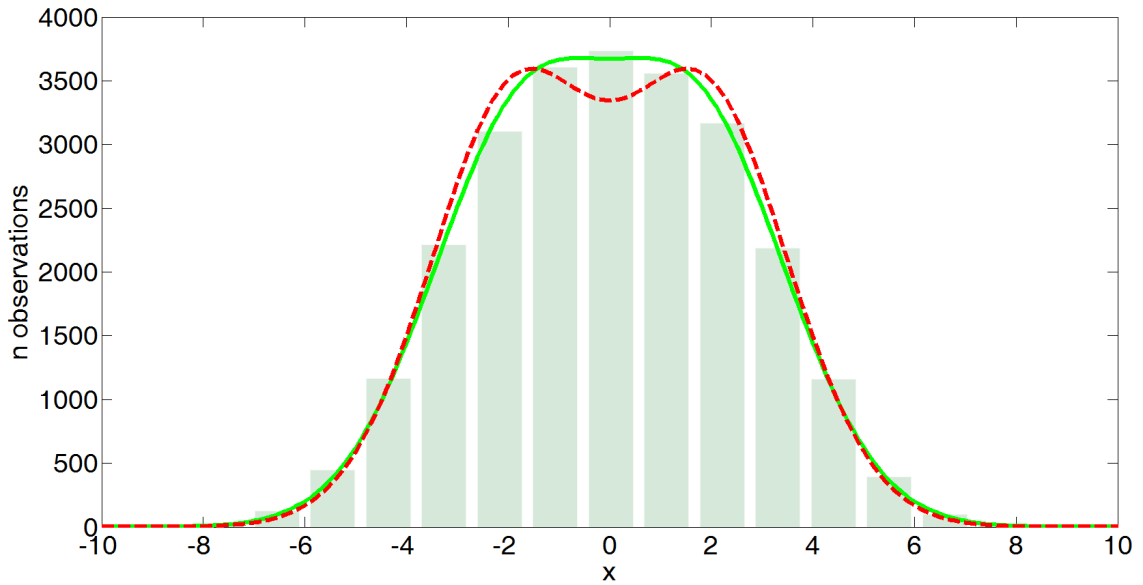
$$L_{r+1} = b_{r+1} \ln \left(1 + \frac{L_r}{b_{r+1}} \right), r = 0, 1, \dots$$

Наряду с параметрами b_r , можно ввести параметры $a_r = \mu b_r$, $r = 1, 2, \dots$

Проведенные эксперименты демонстрируют наличие относительно небольших отклонений от идеальной одноуровневой модели и необходимость учета поправок 2-го уровня.

Сказанное иллюстрируется рисунком 5.5, который отвечает условному распределению с одним отщепленным фотоном.

Мы видим, что уточненная двухуровневая модель более адекватно отражает экспериментальные данные по сравнению с идеальной теорией (в частности, она



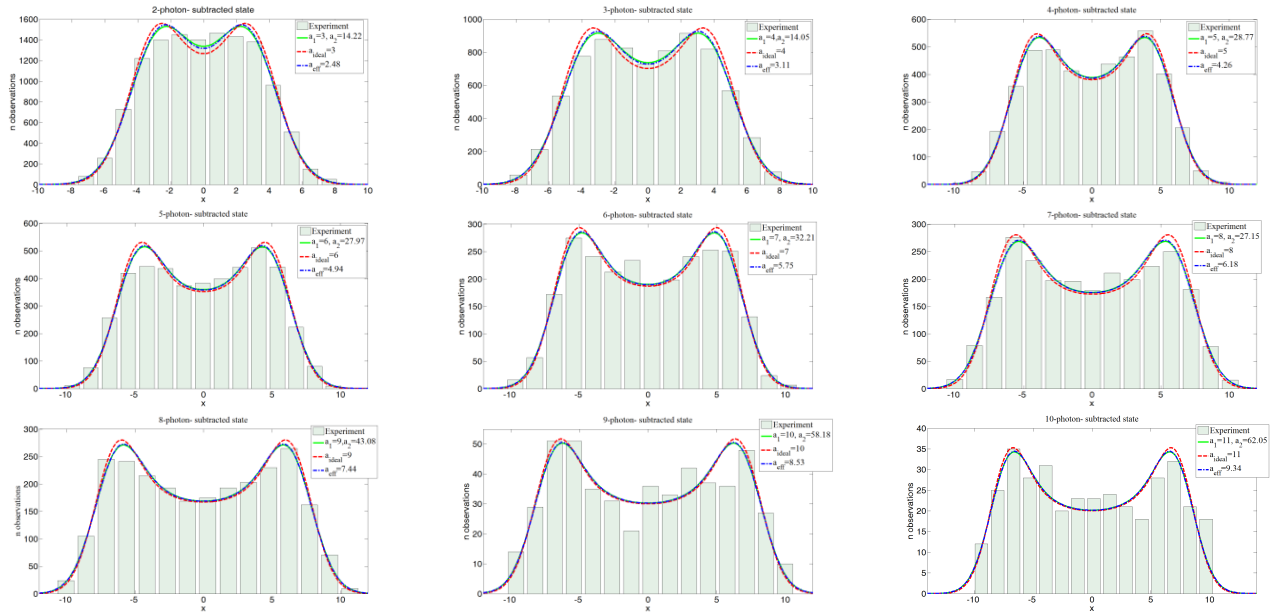
Гистограмма отражает экспериментальные данные, красная штриховая линия показывает идеальную одноуровневую модель с $a^{ideal} = 2$, зеленая сплошная кривая отвечает двухуровневой модели с $a_1 = 2$, $a_2 = 8.46$, везде $\mu = 5.98$.
 Рисунок 5.5 — Распределение квадратурной наблюдаемой для теплового состояния после отщепления одного фотона

объясняет отсутствие локального минимума на кривой плотности вероятности в центре). Отметим также, что при больших значениях $a_2 \rightarrow \infty$, поправки второго уровня становятся исчезающе малыми. Рисунок 5.6 показывает, что при отщеплении от 2 до 10 фотонов различия между одноуровневыми и двухуровневыми моделями становятся малосущественными.

5.6 Выводы по главе

С использованием формализма производящих функций выполнено исследование фотонной статистики условных квантовых состояний.

Показано, что измерение корреляционных функций высокого порядка сводится к приготовлению и квадратурному измерению условных оптических состояний, возникающих при отщеплении от исходного пучка заданного числа фотонов.



Красные штриховые линии показывают одноуровневые модели, зеленые сплошные кривые отвечают двухуровневым моделям.

Рисунок 5.6 — Распределение квадратурной наблюдаемой для теплового состояния после отщепления различных чисел фотонов

В рамках модели составного компаунд-распределения Пуассона рассмотрена статистика фотонов с учетом их группировки для различных квантовых состояний.

Выполнена математическая обработка результатов экспериментов по генерации и измерению тепловых квантовых состояний, а также условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния различного числа фотонов (от одного до десяти). Параметры распределений оценены методом максимального правдоподобия. Точность восстановления каждого из приготовленных состояний оказалась более 99 %.

Показано, что предложенная в настоящей главе модель дает гибкий инструмент для анализа экспериментальных данных оптических квантовых измерений.

Результаты главы представлены в публикациях [160; 161].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан и исследован эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний. Выполнен анализ различных протоколов квантовых измерений, которые обладают высокой точностью реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены. Процедура томографии основывается на корневом подходе к оценке состояния и использовании обобщенной информационной матрицы Фишера для оценки точности.
2. На основе анализа точности протоколов квантовой томографии конечномерных систем, создан метод, позволяющий создавать высокоточные протоколы томографии путем решения задачи, аналогичной задаче упаковки электронов на сфере. Полученное семейство протоколов содержит в себе такие важные наборы, как симметричные информационно полные положительно-значные операторные меры и полные наборы взаимно несмещённых базисов. Показано, что полученные протоколы позволяют достичь более высокой точности реконструкции при фиксированных объемах выборки, чем ранее известные.
3. Предложено теоретическое описание и выполнена обработка экспериментальных данных, связанных с учетом аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах. Проведено исследование явления поляризационного эха, которое является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе.
4. Проведен анализ взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений электромагнитного поля и разработан более совершенный метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по их результатам. Предложен метод выработки адекватных моделей на основе результатов квантовой томографии оптических квантовых состояний по квадратурным измерениям. Показано, что полученные методы обладают значительным превосходством по сравнению с описанными в литературе.

5. Разработаны методы, алгоритмы и программы для оптимальной аппроксимации бесконечномерного квадратурного квантового состояния посредством конечномерной модели, в основе которой лежит использование базиса из сдвинутых сжатых фоковских состояний. Разработанные методы обеспечивают существенно более высокую точность восстановления квантовых состояний по сравнению со стандартным подходом, что подтверждается результатами численных экспериментов и теоретического анализа.
6. Показано, что задача измерения корреляционных функций высокого порядка оптических состояний сводится к приготовлению и квадратурному измерению условных оптических состояний, возникающих при отщеплении от исходного пучка заданного числа фотонов. В рамках модели компаунд-распределения Пуассона, развитый подход применен к исследованию статистики фотонов с учетом их группировки в различных состояниях.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Богданову Ю.И. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство, Авосопянцу Г.В., Катамадзе К.Г. и сотрудникам лаборатории квантовой информации и квантовой оптики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за сотрудничество в проведении исследований. Также автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку исследований. Автор благодарит авторов шаблона *Russian-Phd-Latex-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список сокращений и условных обозначений

SIC	symmetric informationally complete, симметричные информационно полные
POVM	positive-operator-valued measure, положительная операторнозначная мера
MUB	mutually unbiased bases, взаимно несмещенные базисы
FRFT	fractional Fourier transform, дробное преобразование Фурье
IFRFT	inverse fractional Fourier transform, обратное дробное преобразование Фурье

Список литературы

1. *Богданов Ю. И., Валиев К. А., Кокин А. А.* Квантовые Компьютеры: Достигновения, Трудности Реализации И Перспективы // Микроэлектроника. — 2011. — Т. 40, № 4. — С. 243—255.
2. *Quantum Computing Devices: Principles, Designs, and Analysis / G. Chen, D. Church, B. Englert, C. Henkel, B. Rohwedder, M. Scully, M. Zubairy.* — CRC Press, 2006. — (Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science).
3. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. — Mir, 2006. — 824 с.
4. *Валиев К., Кокин А.* Квантовые компьютеры. Надежды и реальность. — РХД, 2001. — 352 с.
5. *Валиев К. А.* Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Усп. физ. наук. — 2005. — Т. 175, № 1. — С. 3—39.
6. Квантовая механика и развитие информационных технологий / Ю. И. Богданов, А. Кокин, В. Лукичев, А. Орликовский, И. Семенихин, А. Чернявский // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2012. — № 1. — С. 17—31.
7. *Sergienko A.* Quantum Communications and Cryptography. — Taylor & Francis, 2005. — 248 p. — (Optical Science and Engineering).
8. *Холево А.* Квантовые системы, каналы, информация. — МЦНМО, 2010.
9. *Bengtsson I., Życzkowski K.* Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. — Cambridge University Press, 2006.
10. *Henderson L., Vedral V.* Classical, quantum and total correlations // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2001. — Vol. 34, no. 35. — P. 6899.
11. *Ollivier H., Zurek W. H.* Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Dec. — Vol. 88, issue 1. — P. 017901.
12. *Zurek W.* Einselection and decoherence from an information theory perspective // Annalen der Physik. — 2000. — Vol. 9, no. 11/12. — P. 855–864.

13. *Aldoshin S. M., Fel'dman E. B., Yurishchev M. A.* Quantum entanglement and quantum discord in magnetoactive materials (Review Article) // *Low Temperature Physics*. — 2014. — Vol. 40, no. 1. — P. 3–16.
14. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Mar. — Vol. 70, issue 13. — P. 1895–1899.
15. *DiVincenzo D. P.* The Physical Implementation of Quantum Computation // *Fortschritte der Physik*. — 2000. — Vol. 48. — P. 771–783. — eprint: quant-ph/0002077.
16. *Preskill J.* Reliable quantum computers // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1998. — Vol. 454, no. 1969. — P. 385–410. — eprint: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/454/1969/385.full.pdf>.
17. *Lvovsky A. I.* Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. — 2004. — Vol. 6, no. 6. — S556.
18. *Богданов Ю. И.* Основные понятия классической и квантовой статистики: корневой подход // *Оптика и спектроскопия*. — 2004. — Т. 96, № 5. — С. 735—746.
19. Оптимизация протокола статистического восстановления поляризационных кубитов / Ю. И. Богданов, С. П. Кулик, Е. В. Морева, И. В. Тихонов, А. К. Гавриченко // *Письма В Журнал Экспериментальной И Теоретической Физики*. — 2010. — Т. 91, № 12. — С. 755—761.
20. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons / Yu. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, S. P. Kulik // *Phys. Rev. A*. — 2006. — June. — Vol. 73, issue 6. — P. 063810.
21. Experimental adaptive Bayesian tomography / K. S. Kravtsov, S. S. Straupe, I. V. Radchenko, N. M. T. Houlsby, F. Huszár, S. P. Kulik // *Phys. Rev. A*. — 2013. — June. — Vol. 87, issue 6. — P. 062122.

22. Experimental Adaptive Quantum Tomography of Two-Qubit States / G. Struchalin, I. Pogorelov, S. Straupe, K. Kravtsov, I. Radchenko, S. Kulik // Phys. Rev. A 93, 012103 (2016). — 2015. — Oct. 18. — arXiv: 1510.05303v1 [quant-ph].
23. Self-calibrating Quantum State Tomography / A. M. Brańczyk, D. H. Mahler, L. A. Rozema, A. Darabi, A. M. Steinberg, D. F. V. James // New J. Phys. 14 085003 (2012). — 2011. — Dec. 19. — arXiv: 1112.4492v2 [quant-ph].
24. Direct generation of three-photon polarization entanglement / D. R. Hamel, L. K. Shalm, H. Hübel, A. J. Miller, F. Marsili, V. B. Verma, R. P. Mirin, S. W. Nam, K. J. Resch, T. Jennewein // Nat Photon. — 2014. — Oct. — Vol. 8, no. 10. — P. 801–807.
25. *Клышко Д.* Фотоны и нелинейная оптика. — Москва : Наука, 1980. — 260 с.
26. Three-photon generation by means of third-order spontaneous parametric down-conversion in bulk crystals / N. A. Borshchevskaya, K. G. Katamadze, S. P. Kulik, M. V. Fedorov // Laser Physics Letters. — 2015. — Vol. 12, no. 11. — P. 115404.
27. *Grubsky V., Feinberg J.* Phase-matched third-harmonic UV generation using low-order modes in a glass micro-fiber // Optics Communications. — 2007. — Vol. 274, no. 2. — P. 447–450.
28. Anisotropy analysis of third-harmonic generation in a germanium-doped silica optical fiber / A. Borne, T. Katsura, C. Félix, B. Doppagne, P. Segonds, K. Bencheikh, J. A. Levenson, B. Boulanger // Opt. Lett. — 2015. — Mar. — Vol. 40, no. 6. — P. 982–985.
29. Hybrid photonic-crystal fiber for single-mode phase matched generation of third harmonic and photon triplets / A. Cavanna, F. Just, X. Jiang, G. Leuchs, M. V. Chekhova, P. S. Russell, N. Y. Joly // Optica. — 2016. — Sept. — Vol. 3, no. 9. — P. 952–955.
30. *Carmon T., Vahala K. J.* Visible continuous emission from a silica microphotonic device by third-harmonic generation // Nat Phys. — 2007. — June. — Vol. 3, no. 6. — P. 430–435.

31. Efficient photon triplet generation in integrated nanophotonic waveguides / M. G. Moebius, F. Herrera, S. Griesse-Nascimento, O. Reshef, C. C. Evans, G. G. Guerreschi, A. Aspuru-Guzik, E. Mazur // *Opt. Express*. — 2016. — May. — Vol. 24, no. 9. — P. 9932–9954.
32. *Wen J., Oh E., Du S.* Tripartite entanglement generation via four-wave mixings: narrowband triphoton W state // *J. Opt. Soc. Am. B*. — 2010. — June. — Vol. 27, no. 6. — A11–A20.
33. Bright Solid State Source of Photon Triplets / M. Khoshnevar, T. Huber, A. Predojević, D. Dalacu, M. Prilmüller, J. Lapointe, X. Wu, P. Tamarat, B. Lounis, P. Poole, G. Weihs, H. Majedi. — 2015. — Oct. 20. — arXiv: 1510.05898v2 [quant-ph].
34. Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement / D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, A. Zeilinger // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Feb. — Vol. 82, issue 7. — P. 1345–1349.
35. *Resch K. J., Walther P., Zeilinger A.* Full Characterization of a Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger State Using Quantum State Tomography // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Feb. — Vol. 94, issue 7. — P. 070402.
36. Experimental Realization of a Three-Qubit Entangled W State / M. Eibl, N. Kiesel, M. Bourennane, C. Kurtsiefer, H. Weinfurter // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Feb. — Vol. 92, issue 7. — P. 077901.
37. Local Transformation of Two Einstein-Podolsky-Rosen Photon Pairs into a Three-Photon W State / T. Tashima, T. Wakatsuki, Ş. K. Özdemir, T. Yamamoto, M. Koashi, N. Imoto // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Apr. — Vol. 102, issue 13. — P. 130502.
38. Experimental quantum teleportation and multiphoton entanglement via interfering narrowband photon sources / J. Yang, X.-H. Bao, H. Zhang, S. Chen, C.-Z. Peng, Z.-B. Chen, J.-W. Pan // *Phys. Rev. A*. — 2009. — Oct. — Vol. 80, issue 4. — P. 042321.
39. New High-Efficiency Source of a Three-Photon W State and its Full Characterization Using Quantum State Tomography / H. Mikami, Y. Li, K. Fukuoka, T. Kobayashi // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Oct. — Vol. 95, issue 15. — P. 150404.

40. On-Chip generation of photon-triplet states in integrated waveguide structures / S. Krapick, B. Brecht, V. Quiring, R. Ricken, H. Herrmann, C. Silberhorn // CLEO: 2015. — Optical Society of America, 2015. — FM2E.3.
41. Three-photon energy-time entanglement / L. K. Shalm, D. R. Hamel, Z. Yan, C. Simon, K. J. Resch, T. Jennewein // Nat Phys. — 2013. — Jan. — Vol. 9, no. 1. — P. 19–22.
42. *Dür W., Vidal G., Cirac J. I.* Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Phys. Rev. A. — 2000. — Nov. — Vol. 62, issue 6. — P. 062314.
43. *Greenberger D. M., Horne M. A., Zeilinger A.* Going Beyond Bell's Theorem // in: 'Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe', M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 69-72 (1989). — 2007. — Dec. 6. — arXiv: 0712.0921v1 [quant-ph].
44. *A. Zeilinger M. A. Horne D. M. G.* Higher-Order Quantum Entanglement // Squeezed States and Quantum Uncertainty / ed. by Z. W. Han D. Kim Y.S. — NASA. "Proceedings ""Squeezed States, Quantum Uncertainty"", College Park, D. Han, Y.S. Kim, W.W. Zachary (Eds.), NASA Conference Publication 3135, National Aeronautics, Space Administration ", 1992. — P. 73–81. — NASA Conference Publication 3135, National Aeronautics and Space Administration.
45. *Fedorov M. V., Miklin N. I.* Three-photon polarization ququarts: polarization, entanglement and Schmidt decompositions // Laser Physics. — 2015. — Vol. 25, no. 3. — P. 035204.
46. *Бор Н.* Дискуссия с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избранные научные труды в 2-х томах. Т. 2. — Наука, 1971. — С. 399—433.
47. *Bogdanov Yu. I.* Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics // New Topics in Quantum Physics Research. — Nova Science Publishers Inc, 12/01/2006. — P. 1–36. — arXiv: quant-ph/0303013v1 [quant-ph].
48. Statistical estimation of the quality of quantum-tomography protocols / Yu. I. Bogdanov, G. Brida, I. D. Bukeev, M. Genovese, K. S. Kravtsov, S. P. Kulik, E. V. Moreva, A. A. Soloviev, A. P. Shurupov // Phys. Rev. A. — 2011. — Oct. — Vol. 84, issue 4. — P. 042108.

49. Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols / Yu. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese, S. P. Kulik, E. V. Moreva, A. P. Shurupov // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — July. — Vol. 105, issue 1. — P. 010404.
50. Statistical reconstruction of qutrits / Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, A. N. Penin, A. A. Zhukov, L. C. Kwek, C. H. Oh, M. K. Tey // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Oct. — Vol. 70, issue 4. — P. 042303.
51. Qutrit State Engineering with Biphotons / Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, A. A. Zhukov., C. H. Oh, M. K. Tey // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Dec. — Vol. 93, issue 23. — P. 230503.
52. *Богданов Ю. И.* Основная задача статистического анализа данных. Корневой подход // МИЭТ. — 2002.
53. *Богданов Ю. И.* Унифицированный метод статистического восстановления квантовых состояний, основанный на процедуре очищения // ЖЭТФ. — 2009. — Т. 135, № 6. — С. 1068—1078.
54. *Bogdanov Yu. I.* Unified statistical method for reconstructing quantum states by purification // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2009. — June. — Vol. 108, no. 6. — P. 928–935.
55. *Bogdanov Y. I., Kulik S. P.* The efficiency of quantum tomography based on photon detection // *Laser Physics Letters.* — 2013. — Vol. 10, no. 12. — P. 125202.
56. *Bogdanov Yu. I., Belinsky L. V.* Finite frames constructed by solving Fekete problem and accuracy of quantum tomography protocols based on them // *Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014.* Vol. 9440. — 2014. — P. 94401L-94401L-8.
57. *Bogdanov Yu. I., Bukeev I. D., Gavrichenko A. K.* Statistical properties of fidelity in quantum tomography protocols in Hilbert spaces of different dimensions. — 2011. — arXiv: 1102.3880 [quant-ph].
58. *Lu H.-X., Zhao J.-Q., Wang X.-Q.* Characterization of a high-intensity three-qubit GHZ state using state tomography and Gisin's inequality // *Physics Letters A.* — 2011. — Vol. 375, no. 18. — P. 1850–1854.

59. Analysis of quantum tomography protocol efficiency for triphoton polarization states / Yu. I. Bogdanov, Yu. A. Kuznetsov, G. V. Avosopyants, K. G. Katamadze, L. V. Belinsky, N. A. Borshchevskaya // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016. Vol. 10224. — 2016. — 102242R-102242R-11.
60. Analysis of triphoton polarization state tomography accuracy / Yu. I. Bogdanov, Yu. A. Kuznetsov, G. V. Avosopyants, K. G. Katamadze, L. V. Belinsky // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — P2–54.
61. *Filippov S. N., Man'ko V. I.* Symmetric informationally complete positive operator valued measure and probability representation of quantum mechanics // Journal of Russian Laser Research. — 2010. — May. — Vol. 31, no. 3. — P. 211–231.
62. Symmetric informationally complete quantum measurements / J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, C. M. Caves // Journal of Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 45, no. 6. — P. 2171–2180.
63. *Planat M., Rosu H. C., Perrine S.* A Survey of Finite Algebraic Geometrical Structures Underlying Mutually Unbiased Quantum Measurements // Foundations of Physics. — 2006. — Nov. — Vol. 36. — P. 1662–1680.
64. *Wootters W. K., Fields B. D.* Optimal state-determination by mutually unbiased measurements // Annals of Physics. — 1989. — Vol. 191, no. 2. — P. 363–381.
65. *Ivonovic I. D.* Geometrical description of quantal state determination // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1981. — Vol. 14, no. 12. — P. 3241.
66. *Zauner G.* Quantum Designs: Foundations of a Noncommutative Design Theory // International Journal of Quantum Information. — 2011. — Vol. 09, no. 01. — P. 445–507.
67. *Grassl M.* On SIC-POVMs and MUBs in Dimension 6. — 06/2004. — URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0406175>.
68. *Scott A. J., Grassl M.* Symmetric informationally complete positive-operator-valued measures: A new computer study // Journal of Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 51, no. 4. — P. 042203.

69. *Broome H., Waldron S.* On the construction of highly symmetric tight frames and complex polytopes // *Linear Algebra and its Applications*. — 2013. — Vol. 439, no. 12. — P. 4135–4151.
70. *Smale S.* Mathematical problems for the next century // *The Mathematical Intelligencer*. — 1998. — Vol. 20, no. 2. — P. 7–15.
71. *Saff E., Kuijlaars A.* Distributing many points on a sphere // *The Mathematical Intelligencer*. — 1997. — Vol. 19, no. 1. — P. 5–11.
72. *Brown K.* Min-Energy Configurations of Electrons On A Sphere. — URL: <http://mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm>.
73. *Богданов Ю. И., Букеев И. Д., Гавриченко А. К.* Исследование адекватности, полноты и точности протоколов квантовых измерений // *Оптика и спектроскопия*. — 2011. — Т. 111, № 4. — С. 680—689.
74. *Богданов Ю. И., Белинский Л. В.* Создание протоколов квантовой томографии путем решения проблемы Томсона // 21-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика – 2014»: тезисы докладов. — 2014. — С. 105.
75. *Богданов Ю. И., Белинский Л. В.* Оптимизация протоколов томографии квантовых состояний на основе решения задачи Томсона // *Труды ФТИ-АН*. — 2015. — Т. 25. — С. 90—98.
76. *Bogdanov Yu. I., Belinsky L. V.* Mutually Unbiased Bases and SIC-POVM as special cases in the family of solutions to Fekete packing problem in complex space // *International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014: Book of Abstracts*. — Moscow, Zvenigorod, 10/2014. — q3–04.
77. *Knill E., Laflamme R., Milburn G. J.* A scheme for efficient quantum computation with linear optics // *Nature*. — 2001. — Jan. — Vol. 409, no. 6816. — P. 46–52.
78. *O'Brien J. L.* Optical Quantum Computing // *Science*. — 2007. — Vol. 318, no. 5856. — P. 1567–1570. — eprint: <http://science.sciencemag.org/content/318/5856/1567.full.pdf>.
79. *Politi A., Matthews J. C. F., O'Brien J. L.* Shor's Quantum Factoring Algorithm on a Photonic Chip // *Science*. — 2009. — Vol. 325, no. 5945. — P. 1221–1221. — eprint: <http://science.sciencemag.org/content/325/5945/1221.full.pdf>.

80. *Holevo A., Giovannetti V.* Quantum channels and their entropic characteristics // Reports on Progress in Physics. — 2012. — Vol. 75, no. 4. — P. 046001.
81. Математическое моделирование влияния квантовых шумов на качество элементной базы квантовых компьютеров / Ю. И. Богданов, В. Ф. Лукичев, С. А. Нуянзин, А. А. Орликовский, А. С. Холево, А. Ю. Чернявский // Труды Физико-технологического института РАН. — Москва, 2012. — Т. 22. — С. 39—77.
82. Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters / A. Ling, K. P. Soh, A. Lamas-Linares, C. Kurtsiefer // Phys. Rev. A. — 2006. — Aug. — Vol. 74, issue 2. — P. 022309.
83. *Řeháček J., Englert B.-G., Kaszlikowski D.* Minimal qubit tomography // Phys. Rev. A. — 2004. — Nov. — Vol. 70, issue 5. — P. 052321.
84. Choice of measurement sets in qubit tomography / M. D. de Burgh, N. K. Langford, A. C. Doherty, A. Gilchrist // Phys. Rev. A. — 2008. — Nov. — Vol. 78, issue 5. — P. 052122.
85. Measurement of qubits / D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White // Phys. Rev. A. — 2001. — Oct. — Vol. 64, issue 5. — P. 052312.
86. Maximum-Likelihood Methods in Quantum Mechanics / Z. Hradil, J. Řeháček, J. Fiurášek, M. Ježek // Quantum State Estimation / ed. by M. Paris, J. Řeháček. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004. — P. 59–112.
87. *Ghosh G.* Dispersion-equation coefficients for the refractive index and birefringence of calcite and quartz crystals // Optics Communications. — 1999. — Vol. 163, no. 1. — P. 95–102.
88. Статистическое восстановление смешанных состояний поляризационных кубитов / Ю. Богданов, А. Гавриченко, К. Кравцов, С. Кулик, Е. Морева, А. Соловьев // ЖЭТФ. — 2011. — Т. 140, № 2. — С. 224—235.
89. Устройство для регистрации слабых оптических импульсов : Патент РФ 2339919 / С. Молотков, С. Кулик, А. Климов. — Заявл. 15.06.2007.
90. Photoelasticity / ed. by M. Leven, M. Frocht. — Pergamon, 1969.
91. *Абрагам А.* Ядерный магнетизм. — Иностранная литература, 1963. — 551 с. — (International series of monographs on physics).

92. *Запасский В. С., Козлов Г. Г.* Поляризованный свет в анизотропной среде и спин в магнитном поле // Усп. физ. наук. — 1999. — Т. 169, № 8. — С. 909—915.
93. Поляризационные квантовые операции в анизотропной среде с дисперсией / Ю. И. Богданов, А. А. Калинин, С. П. Кулик, Е. В. Морева, В. А. Шершулин, Л. В. Белинский // Труды ФТИАН. — 2012. — Т. 22. — С. 78—102.
94. Mathematical modeling and experimental study of polarization echo in optically anisotropic media / Yu. I. Bogdanov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, E. V. Moreva, V. A. Shershulin, L. V. Belinsky // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2012. Vol. 8700. — 2013. — P. 87001C-87001C-10.
95. Mathematical modeling of polarization echo in optically anisotropic media / Yu. I. Bogdanov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, E. V. Moreva, V. A. Shershulin, L. V. Belinsky // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2012: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2012. — P2-09.
96. *Богданов А. Ю., Богданов Ю. И., Валиев К. А.* Информация Шмидта и запутанность квантовых систем // Вестник Московского Университета. Серия 15: Вычислительная Математика И Кибернетика. — 2007. — № 1. — С. 37—48.
97. Experimental quantum teleportation / D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger // Nature. — 1997. — Dec. — Vol. 390, no. 6660. — P. 575–579.
98. State reconstruction by on/off measurements / A. Allevi, A. Andreoni, M. Bondani, G. Brida, M. Genovese, M. Gramegna, P. Traina, S. Olivares, M. G. A. Paris, G. Zambra // Phys. Rev. A. — 2009. — Aug. — Vol. 80, issue 2. — P. 022114.
99. Maximum-likelihood estimation of the density matrix / K. Banaszek, G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, M. F. Sacchi // Phys. Rev. A. — 1999. — Dec. — Vol. 61, issue 1. — P. 010304.
100. *D'Ariano G. M., Paris M. G. A., Sacchi M. F.* Parameter estimation in quantum optics // Phys. Rev. A. — 2000. — July. — Vol. 62, issue 2. — P. 023815.

101. *Богданов Ю. И., Кривицкий Л. А., Кулик С. П.* Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма В Журнал Экспериментальной И Теоретической Физики. — 2003. — Т. 78, № 6. — С. 804—809.
102. *D'Ariano G. M., Mataloni P., Sacchi M. F.* Generating qudits with $d = 3, 4$ encoded on two-photon states // Phys. Rev. A. — 2005. — June. — Vol. 71, issue 6. — P. 062337.
103. Generalized tomographic maps / M. Asorey, P. Facchi, V. I. Man'ko, G. Marmo, S. Pascazio, E. C. G. Sudarshan // Phys. Rev. A. — 2008. — Apr. — Vol. 77, issue 4. — P. 042115.
104. Manipulating Biphotonic Qutrits / B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford, J. L. O'Brien, K. J. Resch, A. Gilchrist, A. G. White // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Feb. — Vol. 100, issue 6. — P. 060504.
105. *Mikami H., Kobayashi T.* Remote preparation of qutrit states with biphotons // Phys. Rev. A. — 2007. — Feb. — Vol. 75, issue 2. — P. 022325.
106. Tomography of spatial mode detectors / I. B. Bobrov, E. V. Kovlakov, A. A. Markov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // Opt. Express. — 2015. — Jan. — Vol. 23, no. 2. — P. 649–654.
107. *Di Lorenzo Pires H., Florijn H. C. B., Exter M. P. van.* Measurement of the Spiral Spectrum of Entangled Two-Photon States // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Jan. — Vol. 104, issue 2. — P. 020505.
108. *Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L.* Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Dec. — Vol. 88, issue 1. — P. 013601.
109. *Peeters W. H., Verstegen E. J. K., Exter M. P. van.* Orbital angular momentum analysis of high-dimensional entanglement // Phys. Rev. A. — 2007. — Oct. — Vol. 76, issue 4. — P. 042302.
110. *Belinsky A. V., Klyshko D. N.* Two-Photon Wave Packets // Laser Physics. — 1994. — Vol. 4, no. 4. — P. 663–689.

111. Spectral properties of three-photon entangled states generated via three-photon parametric down-conversion in a $\chi^{(3)}$ medium / M. V. Chekhova, O. A. Ivanova, V. Berardi, A. Garuccio // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Aug. — Vol. 72, issue 2. — P. 023818.
112. Tomographic test of Bell's inequality for a time-delocalized single photon / M. D'Angelo, A. Zavatta, V. Parigi, M. Bellini // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Nov. — Vol. 74, issue 5. — P. 052114.
113. Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно дополнительных квадратурных квантовых измерений / Ю. И. Богданов, Г. В. Авосопянц, Л. В. Белинский, К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, В. Ф. Лукичев // *ЖЭТФ.* — 2016. — Т. 150, № 2. — С. 246—253.
114. Паули В. Общие принципы волновой механики //. — Наука, 1975. — С. 352—569. — (Труды по квантовой теории).
115. Yuen H. P., Chan V. W. S. Noise in homodyne and heterodyne detection // *Opt. Lett.* — 1983. — Mar. — Vol. 8, no. 3. — P. 177–179.
116. Schumaker B. L. Noise in homodyne detection // *Opt. Lett.* — 1984. — May. — Vol. 9, no. 5. — P. 189–191.
117. Шляйх В. Квантовая оптика в фазовом пространстве. — ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 760 с.
118. Vogel K., Risken H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Sept. — Vol. 40, issue 5. — P. 2847–2849.
119. Lvovsky A. I., Raymer M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Mar. — Vol. 81, issue 1. — P. 299–332.
120. Chountasis S., Vourdas A., Bendjaballah C. Fractional Fourier operators and generalized Wigner functions // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Nov. — Vol. 60, issue 5. — P. 3467–3473.
121. Condon E. U. Immersion of the Fourier Transform in a Continuous Group of Functional Transformations // *Proceedings of the National Academy of Sciences.* — 1937. — Mar. — Vol. 23, no. 3. — P. 158–164.

122. *Banaszek K., Cramer M., Gross D.* Focus on quantum tomography // New Journal of Physics. — 2013. — Vol. 15, no. 12. — P. 125020.
123. *D'Ariano G. M., Paris M. G., Sacchi M. F.* Quantum Tomography // Vol. 128 / ed. by P. W. Hawkes. — Elsevier, 2003. — P. 205–308. — (Advances in Imaging and Electron Physics).
124. An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics / A. Ibert, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 79, no. 6. — P. 065013.
125. Quantum State Estimation. Vol. 649 / ed. by M. Paris, J. Řeháček. — Springer, 08/11/2004. — 536 p. — (Lecture Notes in Physics).
126. *D'Ariano G. M., Macchiavello C., Paris M. G. A.* Detection of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection // Phys. Rev. A. — 1994. — Nov. — Vol. 50, issue 5. — P. 4298–4302.
127. *Newman M., Barkema G.* Monte Carlo Methods in Statistical Physics. — Clarendon Press, 1999.
128. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines / N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller // The Journal of Chemical Physics. — 1953. — June. — Vol. 21, no. 6. — P. 1087–1092.
129. *Dodonov V., Malkin I., Man'ko V.* Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator // Physica. — 1974. — Vol. 72, no. 3. — P. 597–615.
130. *Боровков А. А.* Математическая статистика: оценка параметров, проверка гипотез. — Наука, 1984. — 472 с.
131. *Cramer H.* Mathematical Methods of Statistics. — Princeton University Press, 03/23/1999. — 575 p.
132. Разработка адекватных моделей оптических квантовых состояний на основе квадратурных измерений / Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, Л. В. Белинский, В. Ф. Лукичев // Микроэлектроника. — 2017. — Т. 46, № 6. — С. 403—410.

133. Informational approach to the tomography of quadrature quantum states / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — q2–01.
134. Курочкин В. Л., Рябцев И. И., Неизвестный И. Г. Квантовая криптография и генерация квантового ключа с использованием одиночных фотонов // Микроэлектроника. — 2006. — Т. 35, № 1. — С. 37—43.
135. Triple photons: a challenge in nonlinear and quantum optics / K. Bencheikh, F. Gravier, J. Douady, A. Levenson, B. Boulanger // Recent advances in crystal optics. — 2007. — Mar. — Vol. 8, no. 2. — P. 206–220.
136. Tomography of the quantum state of photons entangled in high dimensions / M. Agnew, J. Leach, M. McLaren, F. S. Roux, R. W. Boyd // Phys. Rev. A. — 2011. — Dec. — Vol. 84, issue 6. — P. 062101.
137. Quantum Correlations in Optical Angle-Orbital Angular Momentum Variables / J. Leach, B. Jack, J. Romero, A. K. Jha, A. M. Yao, S. Franke-Arnold, D. G. Ireland, R. W. Boyd, S. M. Barnett, M. J. Padgett // Science. — 2010. — Vol. 329, no. 5992. — P. 662–665. — eprint: <http://science.sciencemag.org/content/329/5992/662.full.pdf>.
138. Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion / S. S. Straupe, D. P. Ivanov, A. A. Kalinkin, I. B. Bobrov, S. P. Kulik // Phys. Rev. A. — 2011. — June. — Vol. 83, issue 6. — P. 060302.
139. Versatile shaper-assisted discretization of energy–time entangled photons / B. Bessire, C. Bernhard, T. Feurer, A. Stefanov // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, no. 3. — P. 033017.
140. Creating and manipulating entangled optical qubits in the frequency domain / L. Olislager, E. Woodhead, K. Phan Huy, J.-M. Merolla, P. Emplit, S. Massar // Phys. Rev. A. — 2014. — May. — Vol. 89, issue 5. — P. 052323.
141. Braunstein S. L., Loock P. van. Quantum information with continuous variables // Rev. Mod. Phys. — 2005. — June. — Vol. 77, issue 2. — P. 513–577.
142. Leonhardt U., Paul H. Measuring the quantum state of light // Progress in Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 19, no. 2. — P. 89–130.

143. *Arecchi F. T., Berné A., Bulamacchi P.* High-Order Fluctuations in a Single-Mode Laser Field // *Phys. Rev. Lett.* — 1966. — Jan. — Vol. 16, no. 1. — P. 32–35.
144. *Martienssen W., Spiller E.* Coherence and Fluctuations in Light Beams // *American Journal of Physics.* — 1964. — Vol. 32, no. 12. — P. 919–926. — eprint: <http://dx.doi.org/10.1119/1.1970023>.
145. Ghost Imaging with Thermal Light: Comparing Entanglement and Classical Correlation / A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L. A. Lugiato // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Aug. — Vol. 93, issue 9. — P. 093602.
146. High-Resolution Ghost Image and Ghost Diffraction Experiments with Thermal Light / F. Ferri, D. Magatti, A. Gatti, M. Bache, E. Brambilla, L. A. Lugiato // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — May. — Vol. 94, issue 18. — P. 183602.
147. Two-Photon Imaging with Thermal Light / A. Valencia, G. Scarcelli, M. D'Angelo, Y. Shih // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Feb. — Vol. 94, issue 6. — P. 063601.
148. *Lloyd S.* Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination // *Science.* — 2008. — Sept. — Vol. 321, no. 5895. — P. 1463–1465.
149. Experimental Realization of Quantum Illumination / E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, M. Genovese // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Apr. — Vol. 110, issue 15. — P. 153603.
150. *Vabre L., Dubois A., Boccara A. C.* Thermal-light full-field optical coherence tomography // *Opt. Lett.* — 2002. — Apr. — Vol. 27, no. 7. — P. 530–532.
151. A thermal light source technique for optical coherence tomography / A. Fercher, C. Hitzenberger, M. Sticker, E. Moreno-Barriuso, R. Leitgeb, W. Drexler, H. Sattmann // *Optics Communications.* — 2000. — Vol. 185, no. 1–3. — P. 57–64.
152. Schmidt-like coherent mode decomposition and spatial intensity correlations of thermal light / I. B. Bobrov, S. S. Straupe, E. V. Kovlakov, S. P. Kulik // *New Journal of Physics.* — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 073016.
153. *Zavatta A., Parigi V., Bellini M.* Experimental nonclassicality of single-photon-added thermal light states // *Phys. Rev. A.* — 2007. — May. — Vol. 75, issue 5. — P. 052106.

154. Probing Quantum Commutation Rules by Addition and Subtraction of Single Photons to/from a Light Field / V. Parigi, A. Zavatta, M. Kim, M. Bellini // *Science*. — 2007. — Vol. 317, no. 5846. — P. 1890–1893. — eprint: <http://science.sciencemag.org/content/317/5846/1890.full.pdf>.
155. Subtracting photons from arbitrary light fields: experimental test of coherent state invariance by single-photon annihilation / A. Zavatta, V. Parigi, M. S. Kim, M. Bellini // *New Journal of Physics*. — 2008. — Vol. 10, no. 12. — P. 123006.
156. *Богданов Ю. И., Богданова Н. А.* Статистические модели управления дефектностью и выходом годных в микроэлектронике // *Микроэлектроника*. — 2003. — Т. 32, № 1. — С. 62—76.
157. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ / В. Феллер, Р. Добрушин, А. Колмогоров, Е. Дынкин. — Мир, 1967.
158. *Скалли М. О., Зубайри М. С.* Квантовая оптика / пер. А. Калачев, Т. Митрофанова, В. Самарцев, Р. Шахмуратов. — ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 512 с.
159. *Виленкин Н.* Специальные функции и теория представления групп. — Мир, 1991. — 576 с.
160. Study of higher order correlation functions and photon statistics using multiphoton-subtracted states and quadrature measurements / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // *Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016*. Vol. 10224. — 2016. — 102242Q-102242Q-8.
161. Statistical reconstruction of compound Poisson mixtures of Fock states from quadrature measurements / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // *International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts*. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — q2–05.
162. Probability binning comparison: a metric for quantitating multivariate distribution differences / M. Roederer, W. Moore, A. Treister, R. R. Hardy, L. A. Herzenberg // *Cytometry*. — 2001. — Vol. 45, no. 1. — P. 47–55.
163. *Fasano G., Franceschini A.* A multidimensional version of the Kolmogorov-Smirnov test // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1987. — Mar. — Vol. 225. — P. 155–170.

164. *Peacock J. A.* Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1983. — Feb. — Vol. 202. — P. 615–627.
165. *Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing //. — 2nd ed. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1992. — Chap. 14.7. P. 645–649.
166. *Efron B., Tibshirani R., Tibshirani R. J.* An Introduction to the Bootstrap. — Taylor & Francis Ltd, 05/15/1994. — 456 p.

Список рисунков

1.1	Схема экспериментальной установки для томографии одного кубита .	14
1.2	Распределение числа девяток в вероятности совпадения фиделити для разных протоколов	18
1.3	Распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити) . .	19
1.4	Распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити) при томографии в четырехмерном пространстве	22
2.1	Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 10$ состояний.	31
2.2	Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 14$ состояний.	31
2.3	Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 17$ состояний.	33
2.4	Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для $m = 24$ состояний.	33
3.1	Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол R4, ранг $r = 2$, адекватная модель	42
3.2	Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол R4, ранг $r = 4$, неадекватная модель . .	43
3.3	Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол J4, ранг $r = 2$, адекватная модель	44
3.4	Численный эксперимент по томографии состояний Чоя—Ямилковского. Протокол J4, ранг $r = 4$, неадекватная модель . . .	45
3.5	Экспериментальная установка для томографии квантового процесса с использованием протоколов R4 и J4	45
3.6	Экспериментальная установка для томографии квантового процесса с использованием протокола B4	46
3.7	Установка для наблюдения поляризационных преобразований, возникающих в результате искусственной анизотропии	49
3.8	Статистическое восстановление поляризационного квантового преобразования, связанного с фотоупругостью	50

3.9	Схема экспериментальной установки для наблюдения явления дефазировки поляризационного квантового состояния	52
3.10	Схема экспериментальной установки, отвечающая случаю наблюдения поляризационного эха	53
3.11	Зависимость чистоты поляризационной операции от толщины фазовой пластинки	54
4.1	Схема гомодинных измерений. Неизвестное состояние $ \psi\rangle$ совмещается на 50/50 светоделителе с когерентным состоянием гомодина $ \alpha\rangle$. Тогда разностный фототок I_- , регистрируемый при фазе гомодина θ будет пропорционален $ \alpha x_\theta$, где x_θ — значение квадратурной компоненты.	60
4.2	Восстановление состояния в сжатом сдвинутом базисе Фока. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б) (представлен десятичный логарифм плотности). . .	66
4.3	Распределения потерь точности восстановления квантового состояния в рамках оптимального базисного набора на основе сжатых сдвинутых состояний Фока (а) и в рамках стандартного набора базисных состояний Фока (б). Гистограммы получены по результатам 300 численных экспериментов.	68
4.4	Восстановление состояния кота Шредингера. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б). Представлен десятичный логарифм плотности. . .	69
4.5	Семейство восстановленных кумулятивных функций распределений (размерность гильбертова пространства $s = 7$). Функции распределения позволяют осуществить преобразование квадратурной наблюдаемой x в случайную величину F , которая приближенно имеет равномерное распределение	71

4.6	Слева вверху — квадратурное распределение (численный эксперимент); слева внизу — реконструированное квадратурное распределение ($s = 7$, $F = 0.999454$), представлен десятичный логарифм плотности; справа вверху — преобразование квадратурной переменной к однородному распределению ($s = 7$), гипотеза об однородности распределения подтверждается критерием хи-квадрат; справа внизу — попытка преобразования квадратурной переменной к однородному распределению ($s = 4$), гипотеза об однородности распределения отвергается критерием хи-квадрат	72
4.7	Вверху — зависимость уровня значимости от размерности гильбертова пространства (проверка гипотезы об однородности квадратурной переменной, преобразованной посредством кумулятивных функций распределения). Внизу — зависимость потерь точности от размерности гильбертова пространства	74
5.1	Распределение числа фотонов сжатого состояния при $r = 1.6$	83
5.2	95 % доверительные области оценок при отщеплении до 3 фотонов	88
5.3	95 % доверительные области оценок при отщеплении от 4 до 7 фотонов	89
5.4	95 % доверительные области оценок при отщеплении от 8 до 10 фотонов	90
5.5	Распределение квадратурной наблюдаемой для теплового состояния после отщепления одного фотона	92
5.6	Распределение квадратурной наблюдаемой для теплового состояния после отщепления различных чисел фотонов	93
A.1	Группирование квадратурных наблюдаемых для применения критерия Пирсона	121
A.2	Распределение вероятности совпадения и десятичного логарифма p -значений экспериментальной выборки	124
A.3	Гистограмма распределения p -значений для ранга модели равного рангу истинного состояния	125
A.4	Диаграмма размаха логарифма абсолютных величин изменения статистики при увеличении ранга томографической модели	127
A.5	Пропорция правильно определенных рангов в зависимости от значений $\log_{10} (\Delta\chi^2_{\text{cutoff}})$	128

A.6	Сгруппированные для применения критерия Пирсона выборки значений функции распределения	133
A.7	Диаграмма размаха логарифма абсолютных величин изменения статистики при увеличении ранга томографической модели при тестировании по значениям функции распределения	137

Список таблиц

1	Значения потенциальной энергии и симметрия для конфигураций, эквивалентных решениям задачи в $\mathbb{C}P^1$	27
2	POVM наборы в $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}^4$, $\mathbb{C}^5$ и $\mathbb{C}^6$	29
3	Подмножества POVM решений.	29
4	Максимальные значения функции потерь L и квадраты максимальных кросс корреляций $c_{\max} = \max_{i \neq j} \langle x_i, x_j \rangle $ между состояниями	32
5	Точность восстановления квантовых операций	47
6	Результаты томографии тепловых состояний после отщепления фотонов	87
7	Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью посредством квадратурного критерия Пирсона	123
8	Уровни ошибки первого рода при оценке с нескорректированными уровнями значимости при использовании квадратурного критерия Пирсона	123
9	Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к квадратурным данным и результатам квантовой томографии	126
10	Результаты оценки ранга смешанного оптического квантового состояния по изменению статистики критерия согласия Пирсона между результатами томографии и квадратурными данными	128
11	Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Колмогорова-Смирнова с использованием метода статистического бутстрэпа	130
12	Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Колмогорова-Смирнова с использованием распределения статистики из [165]	130

13	Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова с использованием распределения статистики из [165]	131
14	Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова с использованием метода статистического бутстрэпа	131
15	Значения эмпирических функций распределения p -значений, вычисленных относительно распределения статистики из [165], для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова к квадратурным данным для тестирования результатов томографии	132
16	Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Пирсона, примененного к значениям функции распределения	135
17	Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к значениям функции распределения	135
18	Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к значениям функции распределения для тестирования результатов томографии	136
19	Результаты оценки ранга смешанного оптического квантового состояния по изменению статистики критерия согласия Пирсона между результатами томографии и значениями функции распределения	137

Приложение А

Оценка адекватности результатов гомодинной квантовой томографии с использованием критериев Пирсона и Смирнова

Важным этапом квантовой томографии является проверка согласия между моделью, полученной в результате квантовой томографии, и данными по которым производилась томография. В частности, в корневом подходе проверка согласия используется для выбора оптимального числа параметров модели квантового состояния, что позволяет получать максимально точные оценки при заданном размере выборки [18; 49; 52; 53].

В случае томографии конечномерных систем, выборка распределена согласно мультиномиальному распределению, и критерий согласия Пирсона хорошо подходит для проверки адекватности. В случае квантовой томографии состояний света на основе данных, полученных с помощью гомодинных измерений [113], распределение выборки имеет более сложный характер и требует иного подхода к оценке адекватности.

А.1 Использование критерия Пирсона для проверки согласия

Процедура проверки гипотез с использованием критерия Пирсона опирается на разбиение данных по категориям. В случае томографии конечномерных систем, каждому направлению проекции в протоколе можно сопоставить собственную категорию. Тогда распределение данных по категории мультиномиальное, и критерий Пирсона идеально подходит для проверки гипотез.

Данные, полученные в процессе гомодинной квантовой томографии, представляют собой набор пар $\{(x_i, \theta_i)\}$, где x_i — значения квадратурного оператора

$$X_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} [a \exp(-i\theta) + a^\dagger \exp(i\theta)], \quad (\text{A.1})$$

для фазы гомодина θ_i . Плотность распределения вероятности величин квадратурного оператора, при условии, что система находится в состоянии $|\psi\rangle$, а фаза го-

модина равна θ :

$$f_x(x|\theta) = |\langle x, \theta | \psi \rangle|^2, \quad (\text{A.2})$$

где $|x, \theta\rangle$ — собственный вектор квадратурного оператора X_θ .

Рассмотрим случай, когда значения фазы гомодина, при которых производятся измерения, являются случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от 0 до 2π . Тогда экспериментальные данные представляют собой выборку из двумерного распределения вероятности с плотностью $f(x, \theta) = \frac{1}{2\pi} f_x(x|\theta)$.

Для применения критерия Пирсона, выборку из такого двумерного непрерывного распределения вероятностей необходимо сгруппировать таким образом, чтобы распределение данных по группам хорошо аппроксимировалось мультиномиальным распределением.

Рассмотрим процедуру группировки, предложенную в работе [162]. Процедура заключается в последовательном делении групп пополам. На каждом этапе вычисляется дисперсия данных в группе, относительно каждого из параметров. После этого группа делится пополам относительно параметра с наибольшей дисперсией. Процесс продолжается до тех пор, пока группы не достигнут нужного размера. Пример группировки квадратурных данных таким методом представлен на рисунке А.1.

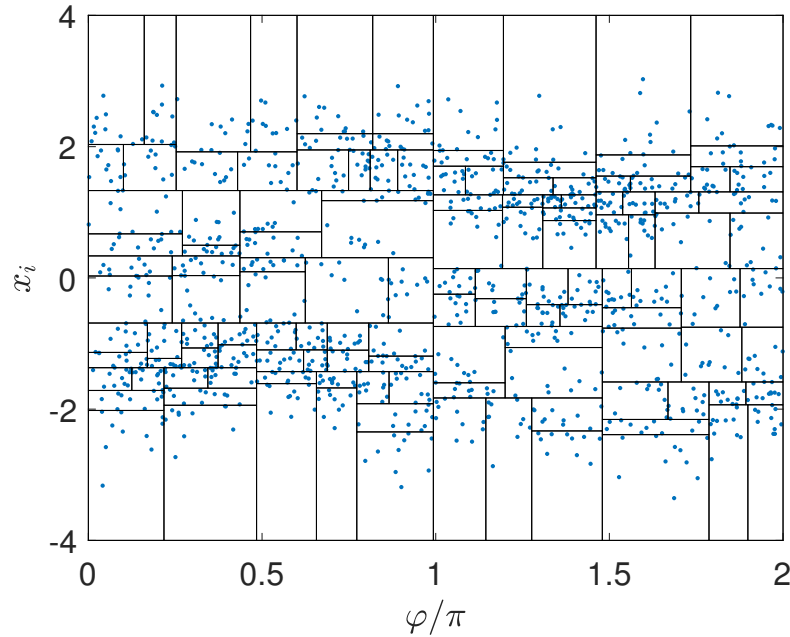


Рисунок А.1 — Группирование квадратурных наблюдаемых для применения критерия Пирсона

После того как данные сгруппированы, мы можем применить критерий Пирсона для оценки адекватности полученной модели.

Статистика критерия согласия Пирсона:

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^n \frac{O_i/N - p_i}{p_i}, \quad (\text{A.3})$$

где

- O_i — количество квадратурных данных в группе i
- p_i — вероятность того, что точка окажется в группе i , согласно проверяемой модели
- N — размер выборки

Для проверки такой процедуры проверки гипотез, мы провели ряд численных экспериментов.

Для проверки ошибки первого рода было сгенерировано десять тысяч случайных квантовых состояний с максимальным числом фотонов равным 9. Среди сгенерированных состояний представлены смеси всех возможных рангов, начиная от чистых состояний (ранг 1), и заканчивая смешанными состояниями максимального ранга (в данном случае 10).

Для каждого из этих состояний при помощи алгоритма Метрополиса — Гастингса была сформирована выборка квадратурных измерений, содержащая 1280 точек. После этого, на основе выборки, для каждого из состояний была вычислена статистика критерия согласия Пирсона, где в качестве проверяемой модели использовались те же состояния, что и для создания выборки.

В таблице 7 приведены квантили p -значений, вычисленных в предположении, что полученная статистика подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы на единицу меньше, чем число групп.

Когда полученная статистика действительно распределена согласно распределению хи-квадрат, то p -значения распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$. Как видно из таблицы, в нашем случае распределения p -значений в численном эксперименте неидеально соответствуют равномерному распределению. В то же время, критерий не чувствителен к рангу смешанных квантовых состояний. Благодаря этому, мы можем скорректировать уровни значимости, необходимые для отвержения гипотезы, заменив их соответствующими квантилями экспериментального распределения p -значений. Например, если требуется критерий с вероятностью ошибки первого рода 5 %, то вместо критического значения χ^2 , соответствующего уровню значимости 5 %, используется критическое значение, соответ-

Таблица 7 — Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью посредством квадратурного критерия Пирсона

квантиль	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.00056	0.00166	0.01437	0.03733	0.09895	0.36405	0.65216
ранг 1	0.00033	0.00271	0.02136	0.04641	0.10633	0.37444	0.66805
ранг 2	0.00037	0.00131	0.01526	0.03790	0.09535	0.34478	0.62934
ранг 3	0.00086	0.00185	0.01545	0.03439	0.09705	0.35004	0.61731
ранг 4	0.00066	0.00144	0.01146	0.02654	0.08783	0.35555	0.65559
ранг 5	0.00048	0.00167	0.01342	0.03653	0.10410	0.38351	0.68264
ранг 6	0.00130	0.00247	0.01437	0.04297	0.10748	0.35653	0.63457
ранг 7	0.00070	0.00192	0.01219	0.03726	0.09642	0.36042	0.65910
ранг 8	0.00052	0.00233	0.01657	0.03468	0.09620	0.38170	0.66907
ранг 9	0.00032	0.00069	0.01232	0.04059	0.10122	0.36709	0.66109
ранг 10	0.00101	0.00209	0.01451	0.03886	0.10503	0.36171	0.64548

ствующее уровню значимости 1.4374 %. Это обеспечивает необходимую вероятность ошибки первого рода. Ошибки первого рода при оценке с нескорректированными уровнями значимости приведены в таблице 8.

Таблица 8 — Уровни ошибки первого рода при оценке с нескорректированными уровнями значимости при использовании квадратурного критерия Пирсона

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.02350	0.03890	0.12300	0.20120	0.32630	0.62530	0.81960
ранг 1	0.01703	0.03407	0.10521	0.19339	0.30661	0.60822	0.81363
ранг 2	0.02293	0.03689	0.12961	0.21037	0.34098	0.65005	0.82353
ранг 3	0.02004	0.03165	0.12447	0.20675	0.35127	0.64768	0.85021
ранг 4	0.02764	0.04442	0.13623	0.21915	0.35242	0.63080	0.81244
ранг 5	0.03122	0.04683	0.12383	0.19251	0.31426	0.60354	0.80645
ранг 6	0.02095	0.03905	0.11238	0.19238	0.32095	0.63333	0.83048
ранг 7	0.02480	0.04564	0.12500	0.20437	0.33433	0.62202	0.81548
ранг 8	0.01621	0.02955	0.12679	0.20400	0.32031	0.61010	0.80362
ранг 9	0.02600	0.04200	0.12000	0.19500	0.30700	0.62300	0.81500
ранг 10	0.02887	0.03918	0.12680	0.19381	0.31546	0.62474	0.82680

Для проверки ошибки второго рода при сравнении сильно различающихся состояний было сгенерировано 100 смешанных состояний различных рангов с максимальным числом фотонов равным трем и создана квадратурная экспериментальная выборка из 1280 точек для каждого из них. Далее для каждого из состояний было вновь сгенерировано 100 случайных состояний различных рангов, которые служили в качестве моделей, и были протестированы гипотезы о том, что квадратурные выборки согласуются с моделями.

Были оценены пропорции p -значений, лежащие справа от скорректированных уровней значимости. Для случайно выбранных моделей, гипотеза о том, что выборка согласуется с моделью, не была принята ни разу даже при уровне значимости 0.5 %. Наибольшее p -значение среди всех численных экспериментов имеет порядок 10^{-12} . Таким образом, квадратурный критерий Пирсона надежно различает сильно отличающиеся состояния света.

В качестве критерия близости квантовых состояний мы используем вероятность совпадения (Fidelity) $F = |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2$. На рисунке А.2 представлено распределение p -значений в зависимости от вероятности совпадения между состояниями. Как видно, чем ближе состояния, тем большее p -значение можно ожидать, но при этом все из них очень малы.

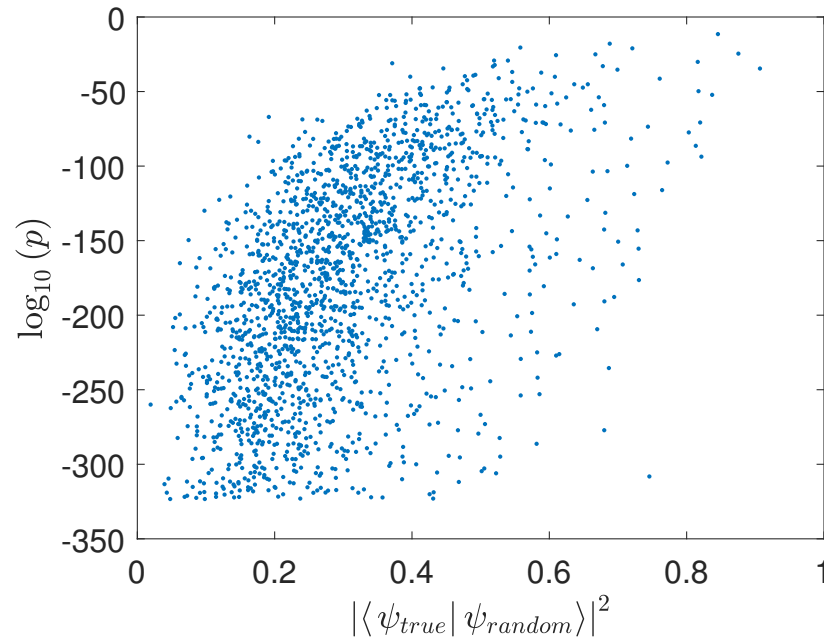


Рисунок А.2 — Распределение вероятности совпадения и десятичного логарифма p -значений экспериментальной выборки

В последнюю очередь проверим, насколько хорошо критерий позволяет различать близкие квантовые состояния. Для этого удобно рассматривать модели, по-

лученные в результате квантовой томографии. Мы сгенерировали тысячу случайно выбранных квантовых состояний пятого ранга, с максимальным числом квантов равным девяти. Для каждого из этих состояний мы сгенерировали квадратурную выборку и применили к ней процедуру квантовой томографии корневым подходом, развитую в работах в [18; 47—53]. Томография была проведена для всех возможных рангов реконструируемой модели. Таким образом, для каждого из тысячи состояний, мы получили 10 моделей различных рангов.

На рисунке А.3 представлена гистограмма полученных p -значений при оценке согласия результатов томографии с квадратурными данными, когда ранг модели совпадает с рангом истинного состояния. Как видно, преобладают p -значения близкие к единице, что свидетельствует о том, что при вычислении p -значений было выбрано слишком большое число степеней свободы.

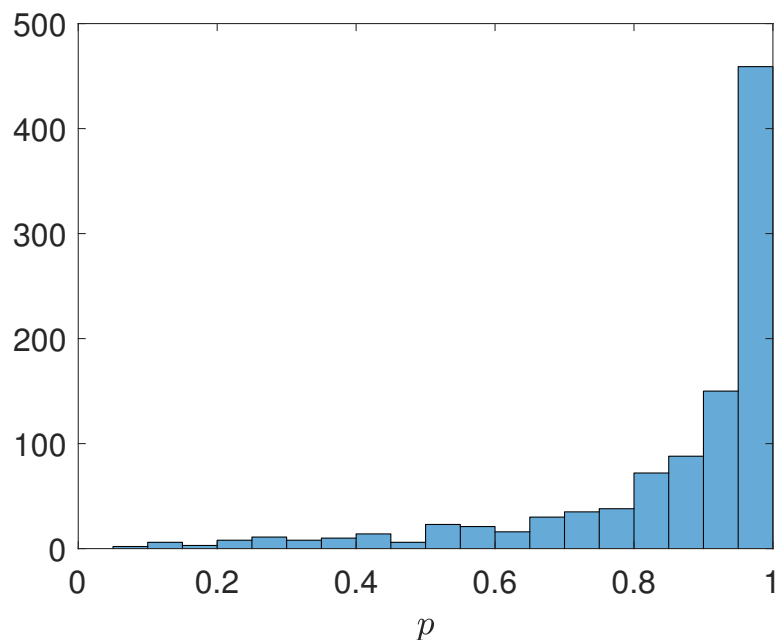


Рисунок А.3 — Гистограмма распределения p -значений для ранга модели равного рангу истинного состояния

Для компенсации этого искажения, рассмотрим результаты томографии в случае совпадения рангов реконструируемой модели и истинного состояния. В случае идеального совпадения результата томографии с истинным состоянием, распределение p -значений критерия согласия должно быть равномерным на отрезке $[0, 1]$. На практике, точность результатов томографии ограничена размером выборки [18; 48; 52; 53], но, в целях выбора уровней значимости, результаты с правильным рангом можно условно принять за идеальные. Тогда вновь можно прибегнуть к замене теоретических уровней значимости на эмпирические квантили

распределения p -значений, аналогично корректировке, проведенной при анализе ошибок первого рода.

В таблице 9 приведены значения эмпирических функций распределения p -значений для различных скорректированных уровней значимости и рангов реконструированной модели. Как видно, в данном случае критерий надежно отвергает гипотезу о том, что выборки согласуется с моделями первого ранга, однако, чем ближе ранг модели к рангу истинного состояния — тем чаще гипотеза о согласии принимается. Для случаев, когда ранг модели превышает ранг истинного состояния, распределение p -значений не зависит от ранга модели и практически совпадает с распределением для истинного ранга.

Таблица 9 — Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к квадратурным данным и результатам квантовой томографии

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
ранг 1	1	1	1	1	1	1	1
ранг 2	0.472	0.56	0.778	0.865	0.936	0.984	0.995
ранг 3	0.026	0.039	0.134	0.215	0.39	0.712	0.899
ранг 4	0.008	0.017	0.063	0.118	0.22	0.533	0.771
ранг 5	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
ранг 6	0.005	0.009	0.048	0.098	0.198	0.496	0.746
ранг 7	0.005	0.009	0.048	0.098	0.198	0.496	0.746
ранг 8	0.005	0.009	0.048	0.098	0.198	0.496	0.746
ранг 9	0.005	0.009	0.048	0.098	0.198	0.496	0.746
ранг 10	0.005	0.009	0.048	0.098	0.198	0.496	0.746

Определение ранга смешанного квантового состояния по квадратурным данным

Интересным является тот факт, что, когда ранг модели превышает ранг истинного состояния, результаты реконструкции для большинства состояний практически не зависят от ранга модели. Благодаря этому, определять истинный ранг

при реконструкции неизвестного состояния можно судя по изменениям статистики критерия согласия при последовательном увеличении рангов модели: истинным является максимальный ранг, для которого при переходе к модели с большим рангом значительно изменяется статистика критерия.

Применяя эту процедуру к нашей экспериментальной выборке, мы получили результаты, представленные в таблице 10. Предложенная процедура корректно определила ранг состояния в 57.1 % случаев. В случае ошибки, 83.2 % оценок отличаются от истинного результата на один ранг. В трех случаях изменение статистики было значительным для всех рангов, и определить ранг не удалось.

Изменение статистического критерия мы считаем значительным в тех случаях, когда десятичный логарифм модуля разности значений статистики $\log_{10} (\Delta\chi^2_{\text{cutoff}})$ превышает -3.9616 . Это значение — 0.661-квантиль распределения десятичных логарифмов модуля разности статистик при увеличении ранга модели с шести до семи. Оно выбрано в результате численной оптимизации числа корректно идентифицированных рангов. На рисунке А.4 представлена диаграмма размаха этих величин при увеличении ранга модели. На рисунке А.5 — пропорция правильно определенных рангов в зависимости от значений $\log_{10} (\Delta\chi^2_{\text{cutoff}})$. Обратим внимание на тот факт, что предложенный метод тестирования не слишком чувствителен к выбору значения $\log_{10} (\Delta\chi^2_{\text{cutoff}})$: любое значение из отрезка $[-5.4, -1.6]$ позволяет достичь вероятности правильного определения ранга больше 50 %.

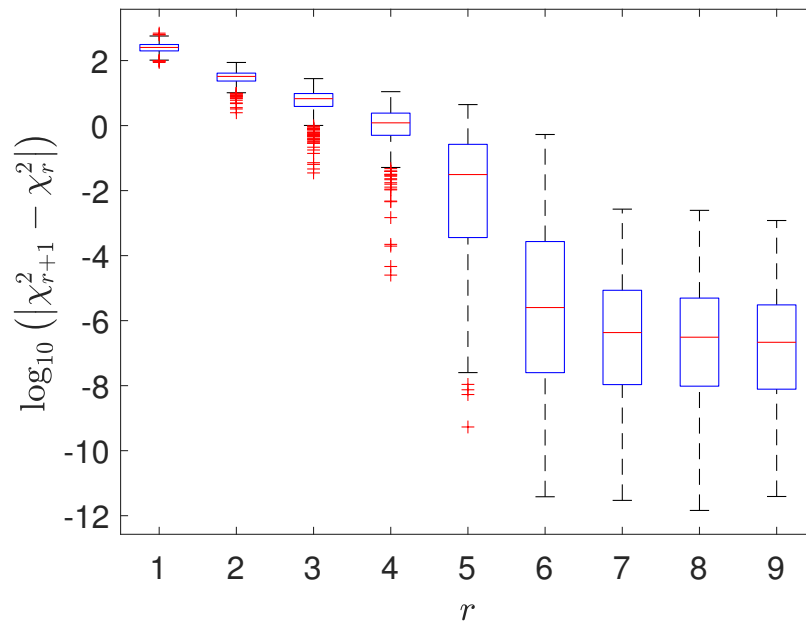


Рисунок А.4 — Диаграмма размаха логарифма абсолютных величин изменения статистики при увеличении ранга томографической модели

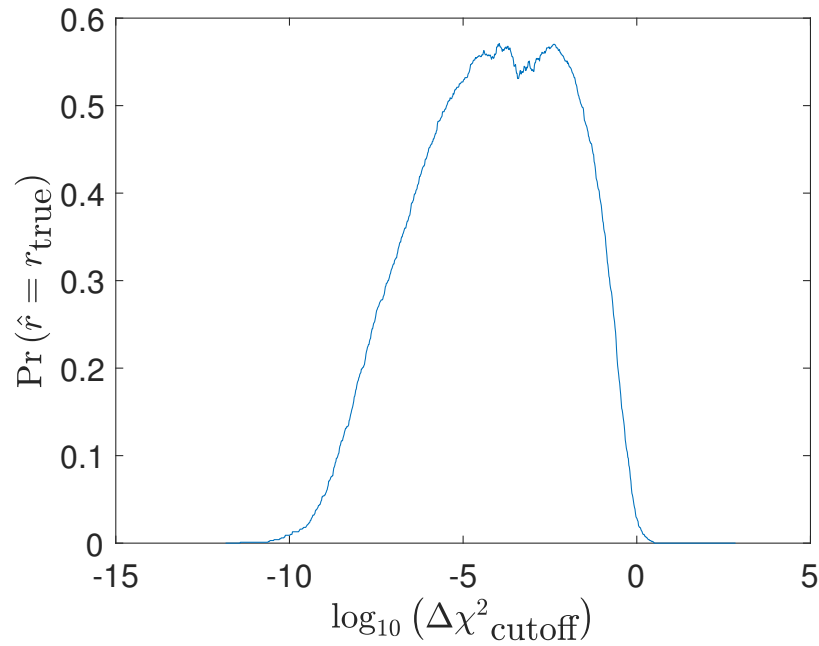


Рисунок А.5 — Пропорция правильно определенных рангов в зависимости от значений $\log_{10}(\Delta\chi^2_{\text{cutoff}})$

Таблица 10 — Результаты оценки ранга смешанного оптического квантового состояния по изменению статистики критерия согласия Пирсона между результатами томографии и квадратурными данными

ранг	3	4	5	6	7	8
число результатов	2	89	571	268	35	22

А.2 Использование критерия Колмогорова-Смирнова

В качестве альтернативы критерию Пирсона можно рассмотреть критерий Колмогорова-Смирнова. Как и критерий Пирсона, этот критерий предполагает одномерное распределение вероятностей, однако существует метод, позволяющий использовать критерий и в случае многомерных распределений вероятности [163; 164].

Рассмотрим применение критерия однородности Смирнова для проверки согласия между известным квантовым состоянием и квадратурной выборкой. Для этого при помощи алгоритма Метрополиса — Гастингса генерируется квадратурная выборка, соответствующая истинному состоянию, и проводится проверка гипотезы о принадлежности двух выборок одному закону распределения.

В дополнение к p -значениям, полученным согласно распределению статистики, оцененному в [165], можно рассматривать значения, полученные при по-

мощи статистического бутстрэпа [166]. Для их определения, две рассматриваемые выборки объединяются в одну, и из объединенной выборки многократно производится повторный набор данных. Эти повторно выбранные данные образуют новую пару выборок того же размера, что и исходные, и для каждой из полученных пар вычисляется значение статистики. После этого, p -значение статистического бутстрэпа — это просто доля полученных значений статистики, превосходящих значение статистики критерия для исходных выборок.

По аналогии с анализом, проведенным для критерия Пирсона, оценим ошибки первого и второго рода при использовании критерия Колмогорова. Для анализа использовались две тысячи случайных состояний. Все параметры те же, что при тестировании критерия Пирсона.

Начнем с анализа ошибок первого рода. В таблице 12 представлены квантили эмпирического распределения p -значений, вычисленных относительно распределения статистики критерия, полученного в работе [165]. В таблице 11 — квантили эмпирического распределения p -значений, вычисленных методом статистического бутстрэпа. Как видно, при использовании бутстрэпа, распределение p -значений хорошо согласуется с равномерным, что свидетельствует о корректном выборе процедуры бутстрэпа. В случае использования значений из [165], распределение p -значений в целом отличается от равномерного, однако, на включающем наиболее часто используемые уровни значимости отрезке $[0.005, 0.05]$ это отличие незначительное. Благодаря этому, в случае, если желаемый уровень значимости меньше 0.05, критерий Колмогорова-Смирнова можно использовать с p -значениями, вычисленными по формуле из [165], не прибегая к предварительному анализу методом Монте-Карло и калибровке уровней значимости.

Для оценки мощности критерия вновь были приготовлены случайные состояния, по той же схеме, что и при анализе критерия Пирсона в А.1. Число состояний для которых был проведен анализ — двадцать. Для каждого из них проверка проводилась относительно сотни случайных состояний. Максимальное число фотонов — три. Всего было рассмотрено две тысячи пар состояний. На таблицах 13 и 14 представлены значения эмпирической функции распределения при использовании p -значений, полученных по теоретической формуле и методом бутстрэпа соответственно. Как и при анализе критерия Пирсона, в качестве уровней значимости вновь использованы квантили эмпирического распределения p -значений в таблицах 13 и 14, полученные при рассмотрении ошибки первого рода.

Таблица 11 — Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Колмогорова-Смирнова с использованием метода статистического бутстрэпа

квантиль	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.01000	0.01400	0.05400	0.09900	0.19400	0.49300	0.73500
ранг 1	0.01501	0.02078	0.05075	0.07860	0.16310	0.50800	0.76225
ранг 2	0.01074	0.01887	0.05325	0.12480	0.20530	0.52600	0.78350
ранг 3	0.00246	0.00628	0.05005	0.07180	0.17460	0.49400	0.72300
ранг 4	0.00525	0.01165	0.05025	0.09400	0.17400	0.43400	0.62675
ранг 5	0.00111	0.00261	0.03110	0.08900	0.20130	0.51800	0.76600
ранг 6	0.01000	0.01164	0.06815	0.12000	0.19280	0.48000	0.75100
ранг 7	0.01956	0.02700	0.05440	0.08860	0.20170	0.51100	0.74900
ранг 8	0.01640	0.02010	0.07150	0.12550	0.21950	0.51600	0.72500
ранг 9	0.01251	0.01963	0.05630	0.08400	0.17990	0.43900	0.66375
ранг 10	0.01859	0.02056	0.08460	0.12010	0.17150	0.51850	0.75300

Таблица 12 — Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Колмогорова-Смирнова с использованием распределения статистики из [165]

квантиль	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.00980	0.01475	0.03901	0.06162	0.10806	0.25807	0.41341
ранг 1	0.01367	0.01473	0.03822	0.05140	0.09761	0.27386	0.44006
ранг 2	0.01136	0.01502	0.03386	0.07832	0.11673	0.27572	0.45961
ранг 3	0.00365	0.00693	0.03592	0.04738	0.10052	0.25634	0.41334
ранг 4	0.00565	0.00992	0.03587	0.06115	0.09937	0.22458	0.34503
ранг 5	0.00306	0.00407	0.02451	0.05730	0.11606	0.27373	0.44496
ранг 6	0.00968	0.01413	0.04297	0.07324	0.10728	0.24363	0.41990
ранг 7	0.01977	0.02515	0.04176	0.06044	0.11609	0.27307	0.41528
ранг 8	0.01529	0.02221	0.04927	0.07320	0.11763	0.27110	0.39403
ранг 9	0.01674	0.01907	0.03822	0.05597	0.10147	0.22357	0.35776
ранг 10	0.01495	0.02081	0.05459	0.07220	0.09776	0.27441	0.41504

Таблица 13 — Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова с использованием распределения статистики из [165]

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.90100	0.91800	0.96250	0.97600	0.99200	0.99950	1.00000
ранг 1	0.93750	0.94500	0.97500	0.98500	0.99500	1.00000	1.00000
ранг 2	0.90167	0.92333	0.96500	0.97667	0.99000	1.00000	1.00000
ранг 3	0.89143	0.91000	0.95857	0.97143	0.99143	0.99857	1.00000
ранг 4	0.87333	0.89000	0.95000	0.97333	0.99333	1.00000	1.00000

Таблица 14 — Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова с использованием метода статистического бутстрэпа

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.90850	0.91950	0.96250	0.97700	0.99150	0.99950	1.00000
ранг 1	0.94250	0.95750	0.97500	0.99000	0.99500	1.00000	1.00000
ранг 2	0.91000	0.92167	0.96333	0.97833	0.99000	1.00000	1.00000
ранг 3	0.90143	0.90857	0.95857	0.97143	0.99000	0.99857	1.00000
ранг 4	0.87667	0.89000	0.95333	0.97000	0.99333	1.00000	1.00000

Как видно из таблиц, при тестировании согласия между случайно выбранными моделями и данными, критерий Колмогорова-Смирнова обладает меньшей мощностью по сравнению с квадратурным критерием Пирсона, рассмотренным в разделе А.1. Обратим внимание на то, что мощность критерия не зависит от метода, использованного для расчета p -значений. Это подтверждает достоверность выбранной процедуры бутстрэпа и распределения статистики многомерного критерия Колмогорова-Смирнова, полученного в [165].

Далее проанализируем мощность критерия при работе с результатами квантовой томографии. Методика проверки та же, что и при анализе квадратурного критерия Пирсона в разделе А.1. Размер экспериментальной выборки — 500. Результаты для p -значений, вычисленных по формуле из [165], приведены в таблице 15. p -значения, полученные в результате бутстрэпа, имеют практически идентичное распределение после коррекции уровней значимости.

Таблица 15 — Значения эмпирических функций распределения p -значений, вычисленных относительно распределения статистики из [165], для скорректированных уровней значимости при применении критерия Колмогорова-Смирнова к квадратурным данным для тестирования результатов томографии

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
ранг 1	0.08400	0.14600	0.34600	0.48200	0.68800	0.91800	0.98800
ранг 2	0.00400	0.01400	0.05600	0.09800	0.18600	0.51800	0.81400
ранг 3	0.00800	0.00800	0.03400	0.07800	0.19400	0.50600	0.74200
ранг 4	0.00200	0.00800	0.05000	0.11600	0.17600	0.51200	0.75400
ранг 5	0.00800	0.01000	0.05000	0.10200	0.20000	0.50000	0.75000
ранг 6	0.00000	0.00400	0.04400	0.07600	0.20400	0.54600	0.74800
ранг 7	0.00800	0.01600	0.07200	0.11400	0.22200	0.50600	0.74400
ранг 8	0.00400	0.00600	0.07000	0.11200	0.23000	0.53800	0.75600
ранг 9	0.00200	0.00800	0.04200	0.10000	0.20400	0.51000	0.75000
ранг 10	0.00000	0.00200	0.04000	0.08600	0.17400	0.46600	0.74000

Как и критерий Пирсона, критерий Колмогорова-Смирнова лучше всего работает в случае, когда ранг томографической модели значительно ниже, чем ранг истинного состояния и теряет мощность по мере сближения рангов. В отличие от критерия Пирсона, в данном случае величины статистики продолжают меняться по мере увеличения ранга модели, и оценку ранга, подобную рассмотренной для критерия Пирсона, провести невозможно. Вкупе с низкой мощностью, это делает предложенный подход к тестированию состояний плохо пригодным для анализа результатов квантовой томографии.

А.3 Оценка согласия по значениям функции распределения

Помимо прямого тестирования соответствия квадратурных данных с моделями, статистические критерии также можно применять после преобразования данных. Рассмотрим набор данных, полученный после замены каждого значения квадратурной наблюдаемой на значение ее функции распределения в этой точке.

Для вычисления функции распределения используется модель состояния, которую необходимо проверить на соответствие с данными.

Если модель выбрана правильно, то полученный массив значений должен быть выборкой из двумерного равномерного распределения вероятности. Если же модель ошибочная, то распределение будет систематически отличаться от равномерного. На рисунке А.6 приведены примеры сгруппированных для применения критерия Пирсона выборок значений функции распределения для верной и ошибочной модели.

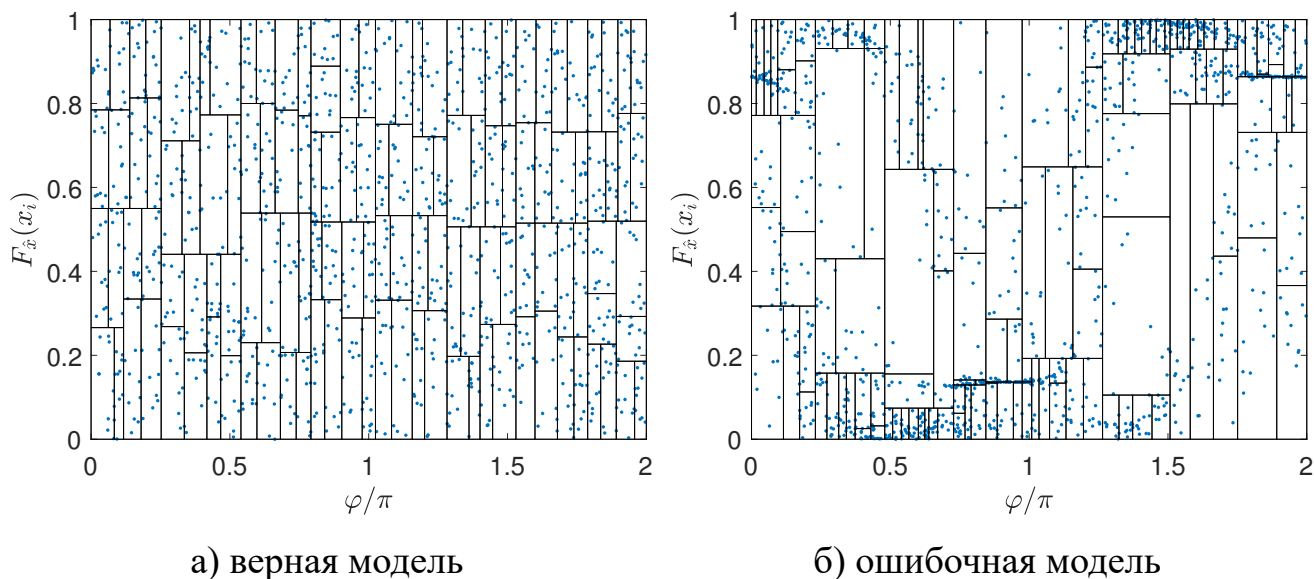


Рисунок А.6 — Сгруппированные для применения критерия Пирсона выборки значений функции распределения

Основываясь на этом, проверку согласия между экспериментальными данными и моделью квантового состояния можно свести к проверке согласия выборки значений функции распределения с равномерным двумерным распределением вероятности. Методы, разработанные для проверки согласия непосредственно по квадратурным данным, пригодны и для обработки значений функции распределения.

А.3.1 Проверка согласия по значениям функции распределения с использованием критерия Пирсона

Поскольку распределение вновь двумерное, для применения критерия Пирсона данные необходимо сгруппировать. Процедура группировки, которая была использована для анализа квадратурных данных в разделе А.1, применима и к значениям функции распределения. При расчете значения статистики χ^2 , теоретическая вероятность попадания данных в группу равна отношению площади, охватываемой группой, к общей площади области определения распределения вероятности. В рассматриваемом случае фаза гомодина изменяется от 0 до 2π , а значения функции распределения принадлежат интервалу $(0, 1)$. Таким образом, для i -ой группы имеем $p_i = \frac{\Delta\theta_i \Delta x_i}{2\pi}$, где $\Delta\theta_i$ и Δx_i — длины сторон прямоугольника, образованного границами группы.

По аналогии с анализом, проведенным для квадратурных данных, мы оценили ошибки первого и второго рода для критерия Пирсона при его применении к значениям функции распределения. В таблице 16 приведены квантили распределения p -значений при проверке согласия экспериментальных выборок с истинными квантовыми состояниями, согласно которым эти выборки были приготовлены. Параметры эксперимента те же, что и при тестировании критерия Пирсона по квадратурным данным в разделе А.1.

Как и в случае применения критерия Пирсона непосредственно к квадратурным данным, преобладают p -значения близкие к 0 и уровни значимости требуют коррекции с использованием выборки численного эксперимента. В таблице 17 приведены значения эмпирической функции распределения p -значений в точках, соответствующих скорректированным уровням значимости. Как видим, в отличие от квадратурного критерия Пирсона, встречаются случаи, в которых гипотеза о том, что случайно выбранная модель согласуется с распределением, ошибочно принимается. В то же время такие случаи редки: мощность критерия равна 99.8 % при уровне значимости 0.5 %.

Далее рассмотрим мощность критерия при анализе результатов томографии. Как и при анализе квадратурного критерия Пирсона в разделе А.1, мы калибруем уровни значимости таким образом, чтобы распределение p -значений в случае совпадения ранга истинного состояния с рангом модели было равномерным. Эмпирические функции распределения относительно скорректированных

Таблица 16 — Квантили распределения p -значений при проверке согласия с верной моделью на основе критерия Пирсона, примененного к значениям функции распределения

квантиль	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.00064	0.00176	0.01592	0.04288	0.11240	0.38756	0.67919
ранг 1	0.00042	0.00101	0.01574	0.04129	0.10521	0.40764	0.68343
ранг 2	0.00071	0.00247	0.02841	0.06040	0.12876	0.38867	0.67830
ранг 3	0.00128	0.00260	0.01355	0.03540	0.09921	0.39322	0.68844
ранг 4	0.00033	0.00109	0.01900	0.03702	0.10158	0.36170	0.66890
ранг 5	0.00076	0.00109	0.01597	0.05153	0.12751	0.39399	0.69304
ранг 6	0.00070	0.00203	0.01241	0.03831	0.12035	0.39831	0.67709
ранг 7	0.00050	0.00064	0.01269	0.03735	0.09833	0.38202	0.68957
ранг 8	0.00126	0.00231	0.01804	0.04109	0.10787	0.38837	0.66617
ранг 9	0.00010	0.00141	0.01524	0.05483	0.13804	0.40858	0.69862
ранг 10	0.00171	0.00320	0.01332	0.03693	0.09463	0.36080	0.67031

Таблица 17 — Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к значениям функции распределения

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
все данные	0.99800	0.99810	0.99890	0.99920	0.99970	0.99990	1.00000
ранг 1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
ранг 2	0.99938	0.99938	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
ранг 3	0.99821	0.99821	0.99929	0.99964	1.00000	1.00000	1.00000
ранг 4	0.99517	0.99552	0.99690	0.99759	0.99897	0.99966	1.00000

уровней значимости при тестировании результатов реконструкции приведены в таблице 18. Как видно, данный критерий обладает сопоставимой с квадратурным аналогом мощностью при тестировании моделей ранга 1 относительно выборок, сгенерированных на основе смеси пятого ранга. Однако, при приближении ранга модели к рангу истинного состояния критерий быстро теряет мощность. Модели ранга 4 практически неотличимы от моделей истинного ранга.

Таблица 18 — Значения эмпирических функций распределения p -значений для скорректированных уровней значимости при применении критерия Пирсона к значениям функции распределения для тестирования результатов томографии

уровень значимости	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75
ранг 1	0.97300	0.98300	0.99100	0.99600	0.99900	1.00000	1.00000
ранг 2	0.04900	0.08800	0.20700	0.29800	0.48000	0.75300	0.92100
ранг 3	0.00500	0.01900	0.07400	0.12600	0.25100	0.54400	0.78000
ранг 4	0.00500	0.01000	0.05200	0.10300	0.21000	0.50200	0.74700
ранг 5	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.20000	0.50000	0.75000
ранг 6	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.19900	0.50300	0.74500
ранг 7	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.19900	0.50300	0.74500
ранг 8	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.19900	0.50300	0.74500
ранг 9	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.19900	0.50300	0.74500
ранг 10	0.00500	0.01000	0.05000	0.10000	0.19900	0.50300	0.74500

Для проверки того, насколько эффективно критерий позволяет определить ранг состояния при томографии, вновь повторим анализ изменения величин статистики, проведенный для квадратурного критерия в разделе А.1. Диаграмма размаха логарифма абсолютных величин изменения статистики при увеличении ранга модели представлена на рисунке А.7. Используя эти значения и считая значимыми изменения статистики, логарифм абсолютной величины которых превышает -4.552 , мы получили оценки ранга, распределение которых представлено в таблице 19. Значение -4.552 было выбрано для максимизации вероятности правильного определения ранга. В 50 случаях ранг определить не удалось. Не смотря на то, что мощность критерия согласия в среднем ниже, чем при непосредственном использовании квадратурных данных, тест, основанный на анализе изменений статистики критерия по мере увеличения ранга модели, позволяет достичь сопоставимой вероятности правильной идентификации ранга — 56.3 %.

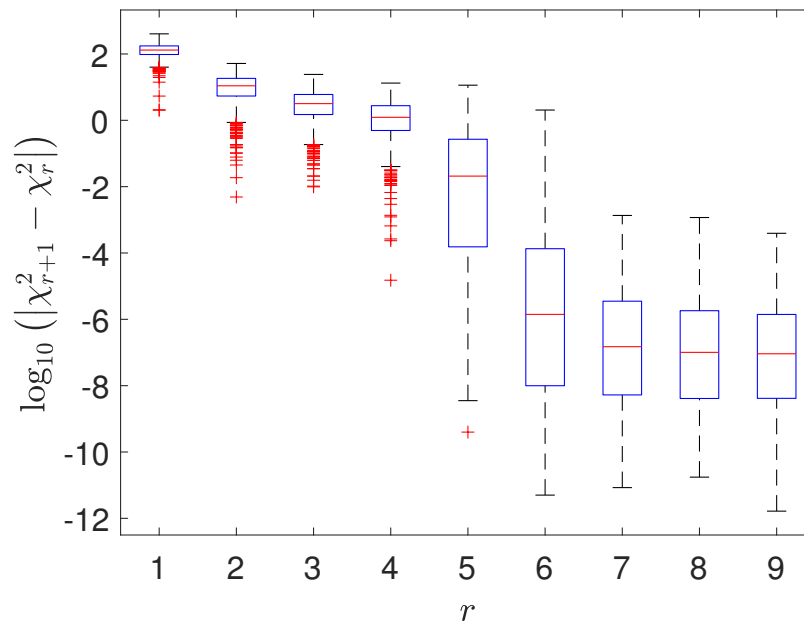


Рисунок А.7 — Диаграмма размаха логарифма абсолютных величин изменения статистики при увеличении ранга томографической модели при тестировании по значениям функции распределения

Таблица 19 — Результаты оценки ранга смешанного оптического квантового состояния по изменению статистики критерия согласия Пирсона между результатами томографии и значениями функции распределения

ранг	3	4	5	6	7	8
число результатов	1	25	563	266	62	33

Метод, основанный на группировке данных и применении статистического критерия Пирсона, позволяет надежно отличить квантовые состояния, в случае, когда квантовое состояние и выборка сгенерированы независимо. На примере смешанных состояний пятого ранга продемонстрировано, что, если квантовое состояние оценено в результате квантовой томографии по гомодинным данным, критерий позволяет с высокой точностью оценить ранг неизвестного смешанного квантового состояния на основе экспериментальных данных из 1280 точек. Таким образом, предложенный метод хорошо подходит для анализа корректности результатов квантовой томографии и определения ранга смешанных оптических состояний, в особенности в случае малых размеров экспериментальных данных.

Кроме того, рассмотрен метод, основанный на многомерном обобщении критерия однородности Смирнова с применением статистического бутстрэпа. Этот метод отличается тем, что распределение статистики критерия слабо зависит от деталей эксперимента и не требует предварительной калибровки на основе

численных экспериментов. В то же время мощность этого метода значительно ниже, чем для метода, основанного на критерии Пирсона, и он не позволяет успешно анализировать ранг квантовых состояний по квадратурным данным. Этот метод может служить для подтверждения результатов более мощных тестов.