

На правах рукописи



**Белинский Леонид Владимирович**

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ  
ВЫСОКОТОЧНОЙ ТОМОГРАФИИ КВАНТОВЫХ  
СОСТОЯНИЙ**

Специальность 05.27.01 —  
«Твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты, микро- и  
нанoeлектроника, приборы на квантовых эффектах»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук  
**Богданов Юрий Иванович**

Официальные оппоненты: **Фельдман Эдуард Беняминович**,  
доктор физико-математических наук,  
лаборатория спиновой динамики и спинового компьютеринга института проблем химической физики РАН,  
заведующий лабораторией

**Страуне Станислав Сергеевич**,  
кандидат физико-математических наук,  
кафедра квантовой электроники МГУ  
им. М.В. Ломоносова,  
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук»

Защита состоится 14 декабря 2017 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.204.01 при Физико-технологическом институте Российской академии наук по адресу: 117218 Москва, Нахимовский проспект 36/1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физико-технологического института РАН и в интернете по адресу <http://ftian.ru/dissosvet/>

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117218 Москва, Нахимовский проспект 36/1, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.204.01.

Автореферат разослан .  
Телефон для справок: +7 495 125–38–26.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 002.204.01,  
канд. физ.-мат. наук

  
Вьборгов Владимир Владимирович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящее время известно несколько классов задач, для которых существующие алгоритмы вычислений на квантовых компьютерах значительно превышают по эффективности все известные классические аналоги. Одной из этих задач является моделирование квантовых эффектов, играющее важную роль в современной химии, нанотехнологии и смежных областях. Благодаря этому, создание полноценного квантового компьютера с числом квантовых бит, достаточным для проведения практически значимых вычислений представляет большой интерес.

Квантовые измерения являются основным средством для контроля квантовых состояний и процессов при разработке технологий квантовых вычислений [1—6] и квантовой связи [7; 8]. Прецизионные методы квантовых измерений необходимы и для глубокого понимания таких фундаментальных квантовых явлений как запутанность [9], дискорд [10—13] и телепортация [14]. Кроме того, возможность прецизионного контроля квантовых состояний является необходимым условием создания масштабируемого квантового компьютера [15; 16].

Таким образом, разработка высокоточных методов квантовой томографии представляет большой практический интерес.

На данный момент наиболее распространенным методом квантовой томографии является метод максимального правдоподобия [17; 18]. В большинстве случаев метод применяется без анализа количества степеней свободы исследуемого состояния или процесса. Это приводит к неэффективному использованию данных и субоптимальной точности оценок. Для преодоления этого недостатка был разработан корневой подход к статистическому восстановлению квантовых состояний [18]. Этот подход заключается в статистической реконструкции квадратного корня из матрицы плотности с выбором адекватной модели, содержащей оптимальное для томографии число параметров, на основе процедуры очищения квантовых состояний.

В случае томографии состояний конечномерных систем, известен метод применения корневого подхода, позволяющий определять оптимальное число параметров модели, используемой для реконструкции квантового состояния, что, в свою очередь, позволяет максимально эффективно использовать имеющиеся данные для оценки исследуемого состояния. Благодаря этому, решающим фактором, определяющим точность результатов томографии при фиксированном объеме экспериментальных данных, становится выбор набора операторов измерения, используемых для получения данных. Таким образом, исследование оптимальной методики выбора экспериментальных протоколов квантовой томографии конечномерных систем является актуальной задачей.

Наряду с томографией конечномерных систем, важной является и задача томографии состояний электромагнитного поля. Возможные оптические состояния обладают бесконечным разнообразием, однако в настоящий момент существует очень ограниченный набор классов состояний, доступных в эксперименте

и представляющих интерес для задач квантовой оптики и квантовой информатики. Среди них — суперпозиции фоковских состояний, когерентные состояния, суперпозиция когерентных состояний (в частности, состояние кота Шредингера), сдвинутые и сжатые фоковские состояния. Часто в процессе томографии исследуемое состояние представляется в фоковском базисе, при этом для полноценного представления нередко необходимо учитывать несколько десятков или сотен фоковских состояний, что приводит к большому числу восстанавливаемых действительных коэффициентов, а значит, к малой точности восстановления. Благодаря этому актуальной является задача исследования методов томографии оптических состояний с использованием моделей, наиболее близко соответствующих природе исследуемых состояний, с целью увеличить точность результатов благодаря использованию оптимального числа степеней свободы для моделирования состояний.

Еще один важный класс состояний света — тепловые состояния. Несмотря на то, что тепловые состояния света являются практически классическими объектами, они обладают квантовыми корреляциями, в частности их нормированная автокорреляционная функция в нуле  $g^{(2)}(0) = 2$ . Это замечательное свойство позволяет использовать такие поля в тех же приложениях, в которых себя хорошо зарекомендовали бифотонные поля. Среди них прозрачное изображение (ghost imaging), квантовое освещение (quantum illumination), оптическая когерентная томография. В связи с этим, возможность точного контроля качества тепловых состояний имеет большую практическую значимость, а исследование поведения этих состояний при добавлении и отщеплении фотонов является актуальным.

Важным этапом квантовой томографии является проверка согласия между моделью, полученной в результате квантовой томографии, и данными по которым производилась томография. В частности, в корневом подходе проверка согласия используется для выбора оптимального числа параметров модели квантового состояния, что позволяет получать максимально точные оценки при заданном размере выборки [18].

В случае томографии конечномерных систем, выборка распределена согласно мультиномиальному распределению, и критерий согласия Пирсона хорошо подходит для проверки адекватности. В случае же квантовой томографии состояний света на основе данных, полученных с помощью гомодинных измерений, распределение выборки имеет более сложный характер и требует иного подхода к оценке адекватности. Отсутствие данных о поведении статистических критериев при оценке адекватности результатов томографии оптических состояний обуславливает актуальность их исследования.

**Целью** данной работы является совершенствование методов квантовой томографии посредством разработки и анализа протоколов прецизионных измерений для систем конечной размерности и квантовых состояний электромагнитного поля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний, обеспечивающий высокую точность реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены.
2. Разработать методы, алгоритмы и программы для получения высококачественных протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности.
3. Разработать методы, алгоритмы и программы томографии поляризационных квантовых операций на базе кварцевых пластинок с учетом дисперсии и формы спектра входного излучения.
4. Провести анализ взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений электромагнитного поля и разработать более совершенный метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных измерений. Разработать методы проверки адекватности результатов томографии оптических квантовых состояний по квадратурным измерениям и исследовать их эффективность.
5. Выполнить исследование методов томографии смешанных квантовых состояний света, со статистикой фотонов, подчиняющейся гамма-компаунд распределению Пуассона и его обобщению с учетом иерархической структуры статистических данных. Развить теорию корреляционных функций высокого порядка для состояний с многофотонным отщеплением. Разработать методы, алгоритмы и программы для томографии таких состояний по квадратурным измерениям.

### **Научная новизна:**

1. Разработан и исследован эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний. Предложенная процедура томографии основывается на корневом подходе к оценке состояния и использовании обобщенной информационной матрицы Фишера для оценки точности измерения параметров квантового состояния.
2. Предложен новый метод получения высококачественных протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности, основанный на решении оптимизационной задачи, аналогичной задаче Томсона и задающий протоколы, позволяющие достичь большей точности, чем известные аналоги, при тех же размерах экспериментальной выборки.
3. Предложено теоретическое описание и выполнена обработка экспериментальных данных, связанных с учетом аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах. Проведено исследование явления поляризационного эха, которое является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе.

4. Разработан новый метод, направленный на создание адекватных статистических моделей оптических квантовых состояний с использованием технологии квадратурных измерений. Метод включает в себя приближенную аппроксимацию бесконечномерного квантового состояния в рамках оптимальной редуцированной конечномерной модели.
5. С использованием формализма производящих функций выполнено оригинальное исследование фотонной статистики условных квантовых состояний. Показано, что измерение корреляционных функций высокого порядка сводится к приготовлению и квадратурному измерению условных оптических состояний, возникающих при отщеплении от исходного пучка заданного числа фотонов. В рамках модели составного компаунд-распределения Пуассона рассмотрена статистика фотонов с учетом их группировки для различных квантовых состояний.

**Практическая значимость** работы заключается в возможности использования результатов для более точного экспериментального исследования квантовых бит, логических элементов и их взаимодействия с окружением. Результаты позволяют усовершенствовать контроль качества элементной базы квантовых компьютеров.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний, основанный на корневом подходе, обеспечивает высокую точность реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены.
2. Метод получения протоколов томографии квантовых систем, заданных в гильбертовых пространствах конечной размерности, основанный на решении обобщённой задачи Томсона, задаёт протоколы измерений, позволяющие достичь большей точности по сравнению с существующими при равных объемах данных. Обнаружено, что полученное семейство протоколов содержит в себе такие важные наборы, как симметричные информационно полные положительно-значные операторные меры и полные наборы взаимно несмещённых базисов. Показано, что разработанные методы, алгоритмы и программы обеспечивают контроль квантовых состояний с точностью, близкой к фундаментальному пределу, допускаемому квантовой механикой.
3. Метод квантовой томографии, основанный на дополнении состояния Чоя—Ямилковского до чистого состояния и оптимальной оценке ранга квантовой операции, обеспечивает многократное увеличение точности по сравнению с ранее известными стандартными методами. Показано, что разработанные методы и алгоритмы описания квантовых операций с учетом шумов могут быть приложены к обеспечению качества и эффективности квантовых информационных технологий, основанных на поляризационной степени свободы фотонов.

4. Метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных измерений, основанный на корневом подходе и использовании в качестве базиса сдвинутых сжатых фоковских состояний, обладает существенным превосходством по сравнению с ранее известными методами, описанными в литературе.
5. Преобразование квадратурных экспериментальных данных посредством кумулятивных функций распределения позволяет свести задачу проверки адекватности результатов квантовой томографии оптических состояний к проверке гипотезы о приближенной однородности возникающего двумерного массива. Критерий хи-квадрат для оценки однородности преобразованных квадратурных данных служит эффективным средством для разработки адекватных и отбраковки неадекватных моделей.
6. Многоуровневая иерархическая модель компаунд-распределений Пуассона более адекватно отражает экспериментальные данные по сравнению с идеальной одноуровневой теорией при анализе условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния различного числа фотонов.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается применением современных методов квантовой теории, вычислительной математики и математической статистики, использованием численных методов Монте-Карло, а также сравнением полученных результатов с результатами других авторов. Выводы разработанных теоретических подходов хорошо согласуются с результатами численных и реальных экспериментов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

- международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2012» (ICMNE-2012);
- международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2014» (ICMNE-2014);
- 21-ой всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика — 2014»;
- международной конференции «Theoretical Physics and its Applications, 2015»;
- второй российско-белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники: импортозамещение и применение» им. О. В. Лосева;
- международной конференции «Микро- и наноэлектроника — 2016» (ICMNE-2016);

**Личный вклад.** Результаты диссертационной работы получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии: разработаны методы получения высококачественных протоколов квантовой томографии на основе решения обобщенной оптимизационной задачи Томсона, создано программное обес-

печение для численного решения этой задачи, проведен анализ полученных решений; разработан метод томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний; проведен анализ результатов экспериментов по поляризационному эху и искусственной оптической анизотропии; разработан и исследован новый метод, направленный на создание адекватных статистических моделей оптических квантовых состояний с использованием технологии квадратурных измерений; выполнена математическая обработка результатов экспериментов по генерации и измерению тепловых квантовых состояний, а также условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния различного числа фотонов. Автор принимал непосредственное участие в постановке задач и анализе полученных результатов, а также в подготовке публикаций в научных журналах и докладов на тематических конференциях.

**Публикации.** Результаты опубликованы в 15 печатных работах, в их числе 6 статей удовлетворяющих требованиям ВАК, из них 2 статьи в российских рецензируемых журналах и 4 статьи в иностранных рецензируемых изданиях, 2 главы в монографиях, 7 тезисов докладов на российских и международных научных конференциях.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах описываются разработанные методы, направленные на улучшение точности томографии квантовых состояний конечномерных систем и электромагнитного поля.

В **первой главе** анализируются различные протоколы восстановления поляризационных состояний трифотонов, обеспечивающие высокую точность в условиях реального эксперимента.

Было проведено сравнение теоретического распределения точности с данными численных экспериментов. В частности, было осуществлено восстановление чистого GHZ-состояния с использованием протокола на основе тетраэдра. На рисунке 1а показано распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити) для объема выборки  $n = 10^5$ : кривая — теоретическое распределение потерь точности, гистограмма — результаты 200 численных экспериментов.

Как видно теория и численные расчеты хорошо согласуются. Среднее значение фиделити  $\langle F \rangle$  составляет 99.991 %. Если восстанавливать чистое состояние как абсолютно смешанное, то  $\langle F \rangle$  будет равно 99.278 %. Таким образом, в данном случае, использование адекватной модели позволяет уменьшить потери точности  $(1 - F)$  (вероятность несовпадения) в 80 раз по сравнению с широко используемой методикой восстановления неизвестного состояния как смеси полного ранга.

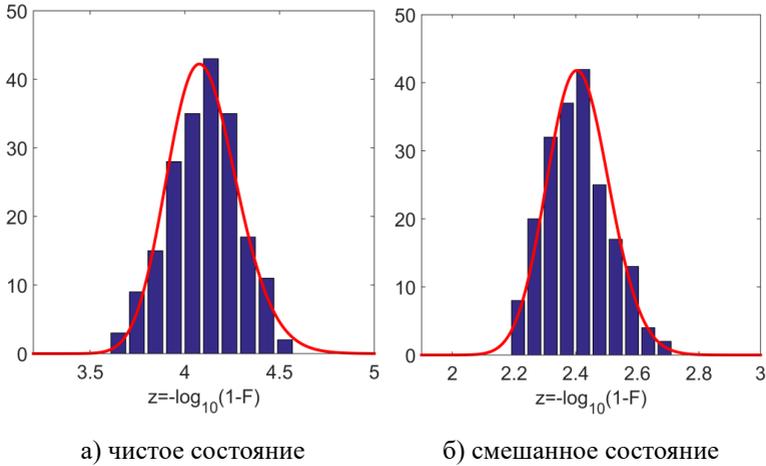


Рис. 1 — Распределение числа девяток в вероятности совпадения (фиделити)

Рассмотрено восстановление трехфотонного состояния, представляющего собой смесь GHZ-состояния и однородной матрицы плотности:

$$\rho = f \frac{I}{s} + (1 - f) |GHZ\rangle \langle GHZ|,$$

где,  $I$  — единичная матрица размерности  $8 \cdot 8$ ,  $f$  — вес состояния, задаваемого однородной матрицей плотности. В нашем случае  $f = 0.5$ . Объем выборки составил  $n = 10^5$ , выполнено 200 численных экспериментов, протокол на основе тетраэдра. Результаты реконструкции представлены на рисунке 1б.

Среднее значение фиделити составило  $\langle F \rangle = 99.596\%$ . Более низкое значение фиделити связано с тем, что в данном случае необходимо оценивать  $s^2 - 1 = 63$  параметров смешанного состояния, в отличие от  $2s - 2 = 14$  параметров чистого состояния. Решение задачи реконструкции в редуцированном базисе совершенно аналогично решению в исходном базисе, но предполагает оценку меньшего числа параметров. Можно ожидать, что точность реконструкции будет выше. Это подтверждают результаты численного исследования.

**Вторая глава** посвящена созданию протоколов квантовой томографии конечномерных систем. Как известно, точность результатов квантовой томографии зависит от выбранного протокола, т.е. от набора направлений, на которые квантовое состояние проецируется в ходе эксперимента. В связи с этим, естественной является задача анализа различных протоколов с целью выявить те, что позволяют достигнуть наибольшей точности при фиксированных размерах экспериментальных выборок.

Обзор различных протоколов квантовой томографии однокубитовых состояний показывает, что протоколы, основанные на симметрии правильных и

полуправильных многогранников, обладают хорошей точностью, которая растет по мере увеличения числа направлений проекции в протоколе. Исходя из этого, предложенный метод создания протоколов основан на как можно более равномерном распределении проекций протокола по пространству всех квантовых состояний. Эта задача имеет много общего с рядом задач равномерного распределения точек по сфере. Одной из этого класса задач является классическая задача Томсона, которая заключается в нахождении равновесной конфигурации электростатически взаимодействующих электронов на сфере. Решения рассматриваемой задачи, а также более общей её формы — задачи Фекете, задают наборы точек, которые равномерно покрывают поверхность сферы в трехмерном пространстве. Нами исследовались свойства решений аналогичной задачи для квантовых состояний.

Каждое из направлений проекции в протоколе измерений квантовой системы размерности  $s$  задается вектором в комплексном векторном пространстве  $\mathbb{C}^s$ , который соответствует квантовому состоянию, на которое производится проекция. Введена аналогичная потенциальной энергии целевая функция для набора  $m$  векторов  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\}$  задающего протокол, по аналогии с задачей Фекете:

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(\psi_i, \psi_j)^{-p} & \text{при } p > 0 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq m} \log [d(\psi_i, \psi_j)^{-1}] & \text{при } p = 0, \end{cases}$$

где  $d(\psi_i, \psi_j)$  — функция, соответствующая расстоянию между состояниями  $|\psi_i\rangle$  и  $|\psi_j\rangle$ , а суммирование идет по всем парам векторов.

Такая формулировка задает широкое семейство задач. Цель процедуры оптимизации — найти конфигурацию состояний, минимизирующую потенциальную энергию взаимодействия между ними. Можно рассматривать как различные величины  $p$ , задающие степенную зависимость силы взаимодействия от расстояния между состояниями, так и различные функции расстояния  $d(\psi_i, \psi_j)$ .

Подробно исследованы решения рассматриваемой задачи со степенью  $p = 0$  и функцией расстояния  $d(\psi_i, \psi_j) = 1 - |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2$ .

Результурующие наборы векторов в  $\mathbb{C}^2$  почти полностью совпадают с решениями задачи Томсона. Среди наборов, для которых мы получили решения, значительные отклонения наблюдаются в двух случаях. Первое отличие заключается в том, что в отличие от наборов Томсона, все найденные нами решения в  $\mathbb{C}^2$  имеют нулевую векторную сумму. При этом симметрии решений совпадают даже в тех случаях, когда векторные суммы отличаются. Нами был найден единственный случай, в котором симметрия решений не совпадает. Это имеет место в наборе из 29 векторов, который имеет симметрию  $C_2$  в нотации Шёнфлиса.

Наибольший интерес представляют наборы состояний, образующие положительные операторнозначные меры (POVM). Интересное свойство решений заключается в том, что в то время как все полученные наборы векторов задают POVM в пространстве  $\mathbb{C}^2$ , этого не наблюдается в пространствах больших размерностей. Более того, все наборы, образующие POVM, обладают одинаковой

Таблица 1 — Подмножества POVM решений

	первое семейство			второе семейство			$ \langle \psi_k   \psi_l \rangle ^2$
	$n_{ss}$	размер	$ \langle \psi_i   \psi_j \rangle ^2$	$n_{ss}$	размер	$ \langle \psi_i   \psi_j \rangle ^2$	
10 векторов в $\mathbb{C}^2$	1	6	1/5	1	4	1/9	1/3
11 векторов в $\mathbb{C}^3$	2	4	1/9	1	3	0	1/3
18 векторов в $\mathbb{C}^4$	2	7	1/8	1	4	0	1/4
19 векторов в $\mathbb{C}^4$	3	5	1/16	1	4	0	1/4
29 векторов в $\mathbb{C}^5$	4	6	1/25	1	5	0	1/5

структурой. Каждый из них можно разделить на подмножества таким образом, что скалярные произведения между всеми векторами, принадлежащими одному подмножеству равны. При этом произведения между любыми двумя векторами из разных подмножеств также равны. Таким образом, эти наборы состояний обладают свойствами как симметричные информационно полные (SIC) POVM, так и полных наборов взаимно несмещенных базисов. Оба эти семейства также являются решениями нашей оптимизационной задачи.

Структура полученных наборов отражена в таблице 1. Центральные столбцы соответствуют подмножествам, на которые можно поделить протокол. В каждом из них указано число таких подмножеств, количество векторов в подмножестве и значение вероятности совпадения между векторами. Значения вероятности совпадения для векторов из разных подмножеств приведены в последнем столбце.

Пригодность полученных наборов состояний для квантовой томографии проверена путем оценки средних потерь точности при реконструкции различных квантовых состояний. В случае томографии одного кубита есть возможность рассмотреть распределение средних потерь по всему пространству  $\mathbb{C}^2$ . Пример такого распределения приведен на рисунке 2. В случае многокубитовой томографии были найдены состояния для которых средние потери точности при реконструкции максимальны. Обнаружено, что полученные протоколы, состоящие из 8 и 20 проекций, обладают большей точностью по сравнению с протоколами, основанными на правильных многогранниках, задающих октаэдр и икосаэдр соответственно. Показано, что по мере роста числа проекций точность томографии полученных протоколов быстро стремится к фундаментальному пределу, допускаемому квантовой механикой.

В **третьей главе** рассмотрен основанный на концепции хи-матриц и состояний Чоя—Ямилковского подход к задаче томографии квантовых процессов. Особое внимание уделено построению адекватных моделей для статистического восстановления квантовых операций.

Показано, что эволюция поляризационных квантовых состояний в анизотропной среде с дисперсией может быть описана в рамках формализма квантовых операций, который основывается на концепции вполне положительных отображений. Развитый подход применяется для задач томографии поляризаци-

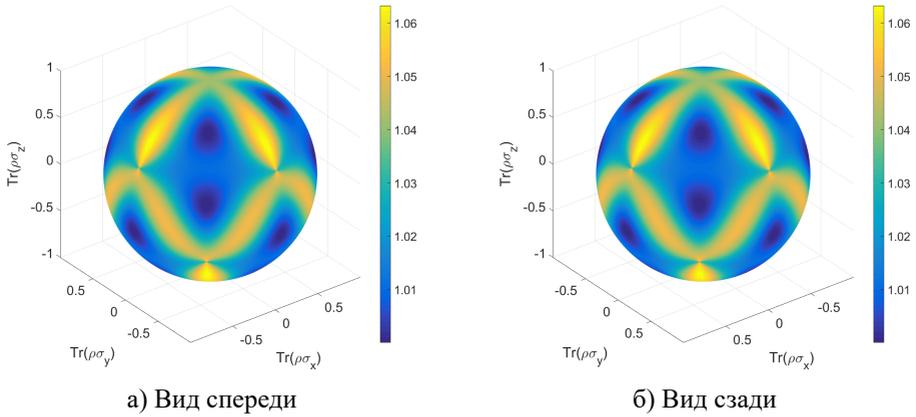


Рис. 2 — Распределение средних потерь точности по сфере Блоха для  $m = 10$  состояний.

Таблица 2 — Точность восстановления квантовых операций  
В скобках — точность при использовании неадекватной модели.

Число пластин	Протокол J4		Протокол R4		Протокол B4	
	Спектральная ширина (нм)					
	0.8	8	0.8	8	0.8	8
0	0.9971	0.9938	0.9978	0.9971	0.9724	-
1	0.9541 (0.9279)	0.9812	0.9735	0.9749 (0.8259)	0.9679	0.9707
2	0.9486	0.9982	0.9669	0.9706	0.9426	0.9678

онных квантовых операций, а также для исследования явлений фотоупругости и поляризационного эха.

Был проведен анализ экспериментов, целью которых было сравнение точности протоколов трех различных типов, а также демонстрация того, что процедура, которая не учитывает неполный ранг процесса, не вполне адекватна.

Проведенные численные эксперименты показали, что использование неадекватных моделей приводит к резкому уменьшению точности статистического восстановления квантовых операций. Фактически оказывается, что асимптотически с увеличением объема выборки  $n$  потери точности ведут себя как  $1/\sqrt{n}$  для неадекватной модели (в то же время для адекватной модели соответствующая зависимость есть  $1/n$ ).

Этот результат подтверждается результатами проанализированных лабораторных экспериментов по восстановлению квантовых процессов. В таблице 2 представлены значения точности восстановления  $F$ , полученные посредством

протоколов J4, R4 и B4. Были восстановлены различные квантовые операции для разных значений ширины спектра: 0.8 нм (квази-чистые состояния) и 8 нм (смешанные состояния). Первая строка носит вспомогательный характер, так как отвечает случаю, когда между подготовительной и измеряемой частями отсутствуют какие-либо кварцевые пластины. В этом случае соответствующая  $\chi$ -матрица описывает тождественное преобразование с точностью, зависящей от качества процедур приготовления и измерения состояний.

Вторая и третья строки соответствуют реконструкции квантовых процессов, осуществляемых соответственно одной и двумя толстыми кварцевыми пластинами. Точность процедуры восстановления зависит от ранга модели в полном соответствии с результатами теоретического рассмотрения. Для случая входных поляризационных состояний с достаточно узким спектром, качество восстановления выше при использовании модели с минимальным рангом. Например, для протокола J4, квантовый процесс, осуществляемый одной толстой кварцевой пластиной над квазичистыми состояниями, восстанавливается с точностью  $F = 0.9541$  для модели ранга 1. Если восстанавливать этот же квантовый процесс с использованием алгоритма ранга 2, то точность снижается до уровня  $F = 0.9279$ . С другой стороны, рассмотрим реконструкцию протоколом R4 квантового процесса, соответствующего одной толстой кварцевой пластине для случая смешанных состояний. Адекватная модель ранга 2, учитывающая ширину спектра даёт более высокое значение точности  $F = 0.9749$  (для неадекватной модели ранга 4 получим значение  $F = 0.8259$ ).

Было проведено исследование явления фотоупругости. Показано, что стеклянная пластинка с механически наведенной анизотропией преобразует каждое из входных состояний из набора R4 одинаковым образом и может быть представлена в виде матрицы стандартного унитарного SU2 преобразования.

Наконец, был экспериментально продемонстрирован эффект поляризационного эха, являющийся аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе. В последнем случае явление связано с обращением дефазировки спинов, возникающей из-за дисперсии ларморовых частот.

Эффект эха наблюдался при толщинах оптических пластин равных 10092 мкм и 20184 мкм.

В первом случае степень согласия между теоретической и реконструированной операциями есть:  $F = 0.9965$ . Чистота реконструированной операции равна 0.99315, что близко к идеальному теоретическому значению  $\text{Purity}_{\text{theor}} = 1$ .

Для пластины толщиной 20184 мкм степень согласия между теоретической и реконструированной операциями равна  $F = 0.9976$ , а чистота реконструированной операции составляет 0.99519.

Таким образом, полученные результаты показывают хорошее согласие между проведенными расчетами и экспериментальными данными.

**Четвёртая глава** посвящена статистическому восстановлению оптических квантовых состояний на основе взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений.

Описывается новый метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по результатам взаимно-дополнительных оптических квадратурных измерений. В основе описываемого метода лежит корневой подход и использование в качестве базиса сдвинутых сжатых фоковских состояний. Теоретический анализ и выполненные численные эксперименты демонстрируют существенное превосходство разработанных средств по сравнению с описанными в литературе.

Мы используем базисный набор функций, который получается из набора фоковских состояний  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) путем последовательного применения операций сдвига  $D(\alpha)$  и сжатия  $S(\xi)$ :

$$\begin{aligned} |\alpha, \xi, k\rangle &= S(\xi) D(\alpha) |k\rangle, \text{ где} \\ D(\alpha) &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \\ S(\xi) &= \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\xi$  — комплексные параметры, а  $a^\dagger$  и  $a$  — операторы рождения и уничтожения фотонов.

Полученный набор функций  $|\alpha, \xi, k\rangle$ , также как исходный набор  $|k\rangle$  является полным.

Для восстановления квадратурного состояния поля был использован метод максимального правдоподобия, который заключается в поиске максимума функции логарифмического правдоподобия

$$S = \log L, \text{ где } L = \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta_k | c). \quad (2)$$

Здесь  $\{x_k, \theta_k\}$  — набор из  $n$  экспериментально измеренных значений квадратур  $x_k$  при соответствующих значениях фазы  $\theta_k$ .

При решении задачи максимизации (2) варьировались не только значения элементов матрицы  $c$ , но и параметры базиса  $\alpha$  и  $\xi$ . Таким образом определялись не только оптимальные амплитуды вероятностей, но и оптимальный вид базисных функций.

Для тестирования разработанных методов, алгоритмов и программ анализа квадратурных квантовых измерений выполнялись численные эксперименты. Точность восстановления квантовых состояний, достигнутая в численных экспериментах, сравнивалась с теорией.

В качестве примера рассмотрим чистое состояние  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , где  $|\psi\rangle = (|\xi, \alpha, 0\rangle + 2i|\xi, \alpha, 1\rangle) / \sqrt{5}$  — суперпозиция сдвинутых сжатых фоковских состояний с параметром сдвига  $\alpha = 0.5 - 0.7i$  и параметром сжатия  $\xi = 0.3 + 0.1i$ . Объем выборки  $n$  случайных квадратурных данных  $\{x_k, \theta_k\}$  в рассматриваемом примере составил 50 тысяч точек (рис. 3а). Данные генерировались методом Метрополиса в соответствии с рассчитанным квадратурным распределением  $p(x, \theta | \rho) = \langle x, \theta | \rho | x, \theta \rangle$ .

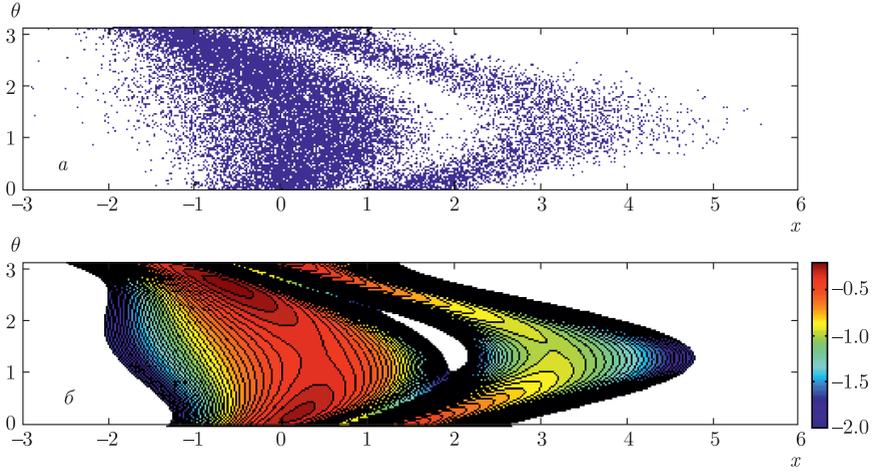


Рис. 3 — Восстановление состояния в сжатом сдвинутом базисе Фока. Сравнение квадратурных данных (а) с результатами статистического восстановления (б) (представлен десятичный логарифм плотности).

В данном случае, для построения адекватной модели в рамках набора сдвинутых сжатых состояний Фока (1) достаточно взять только две первые базисные функции ( $s = 2$ ) и ограничиться рассмотрением только чистых состояний ( $r = 1$ ). Заметим, что адекватность построенной таким образом модели может быть проверена в рамках критерия хи-квадрат. Соответствующий критерий хи-квадрат оценивает степень соответствия между квадратурным распределением, которое отвечает реконструированному состоянию (рис. 3б), и исходными данными численного эксперимента (рис. 3а). Расчеты показывают, что в рамках стандартного набора фоковских состояний для осуществления успешной реконструкции следует рассмотреть примерно 20 первых состояний ( $s = 20$ ). Заметим также, что стандартный подход предполагает оценку смешанного состояния полного ранга ( $r = s = 20$ ).

В рассматриваемом примере, восстановленные модифицированным методом максимального правдоподобия параметры сдвига и сжатия, а также вектор состояния составили соответственно:  $\alpha_{\text{exp}} = 0.5023 - 0.6956i$ ,  $\xi_{\text{exp}} = 0.3044 + 0.1003i$ ,  $|\psi_{\text{exp}}\rangle = 0.4482 |\xi_{\text{exp}}, \alpha_{\text{exp}}, 0\rangle + (0.0015 + 0.8939i) |\xi_{\text{exp}}, \alpha_{\text{exp}}, 1\rangle$ . Вероятность совпадения теоретического и экспериментально восстановленного квантовых состояний оказалась равной  $F = |\langle \psi_{\text{exp}} | \psi_{\text{theor}} \rangle|^2 = 0.999968$ . Для сравнения заметим, что для тех же самых данных численного эксперимента стандартный подход, основанный на наборе фоковских состояний, обеспечил точность реконструкции только на уровне  $F = 0.9970$ . Мы видим, что в рассматриваемом примере предложенный в настоящей работе метод позволяет уменьшить потери точности  $1 - F$  примерно в 94 раза по сравнению со стандартным методом обработки данных (т.е. получить четыре девятки вместо двух для параметра  $F$ ). За-

метим, что, получая довольно высокие значения точности, такие как  $F = 0.9970$ , исследователь зачастую может прийти к неверному выводу о том, что точность разработанного им метода реконструкции достаточно велика. В этой связи важно еще до проведения эксперимента иметь адекватную оценку той точности, которую, согласно законам квантовой механики, способен обеспечить тот или иной протокол квантовых измерений. Замечательно, что такие оценки точности квантовых измерений могут быть получены на основе количественного анализа информации о параметрах квантового состояния, которая содержится в протоколе квантовых измерений.

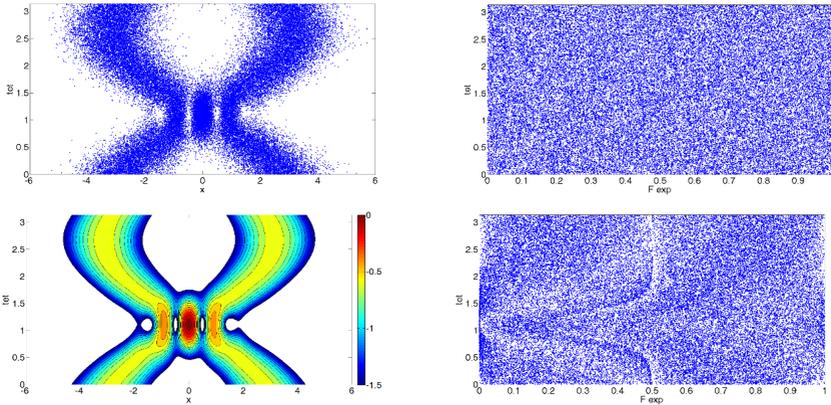


Рис. 4 — Слева сверху — квадратурное распределение (численный эксперимент); слева внизу — реконструированное квадратурное распределение ( $s = 7$ ,  $F = 0.999454$ ), представлен десятичный логарифм плотности; справа сверху — преобразование квадратурной переменной к однородному распределению ( $s = 7$ ), гипотеза об однородности распределения подтверждается критерием хи-квадрат; справа внизу — попытка преобразования квадратурной переменной к однородному распределению ( $s = 4$ ), гипотеза об однородности распределения отвергается критерием хи-квадрат

Показано, что преобразование квадратурных экспериментальных данных посредством кумулятивных функций распределения позволяет свести задачу установления адекватности результатов томографии к проверке гипотезы о приближенной однородности возникающего двумерного массива (рисунок 4). Проведены численные эксперименты, подтверждающие, что критерий хи-квадрат приводит к идентификации квантового состояния с высокой точностью.

**Пятая глава** посвящена исследованию методов измерения корреляционных функций высокого порядка оптических состояний. В основе предложенного подхода лежит математический аппарат производящих функций.

Получено выражение корреляционных функций произвольного порядка через средние значения условных распределений после отщепления от состояния фотонов:

$$g^{(m)} = \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{m-1}}{\mu^{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  и т.д. — средние значения для состояний с отщеплением соответственно одного, двух и более фотонов.

Для описания оптических состояний обладающих суперпуассоновским распределением числа фотонов предложена модель, основанная на компаунд-распределении Пуассона с производящей функцией

$$G(z|\mu, a) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu(1-z)}{a}\right)^a},$$

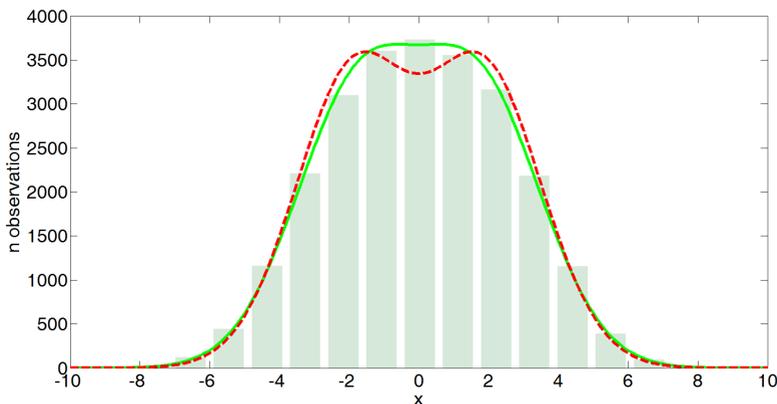
где  $\mu$  — среднее число фотонов,  $a$  — параметр кластеризации (группировки) фотонов. Этот параметр может быть также назван параметром когерентности: чем выше  $a$ , тем ближе рассматриваемое распределение к обычному распределению Пуассона, которое отвечает когерентному состоянию.

Таблица 3 — Результаты томографии тепловых состояний после отщепления фотонов

отщеплено фотонов	$\mu$	$a$	размер выборки	фиделити	уровень значимости
$m = 0$	$3.034 \pm 0.022$	$0.999 \pm 0.016$	50000	99.999	0.37
$m = 1$	$5.983 \pm 0.051$	$1.605 \pm 0.036$	25000	99.659	0.112
$m = 2$	$9.063 \pm 0.093$	$2.515 \pm 0.088$	12500	99.777	0.55
$m = 3$	$12.261 \pm 0.150$	$3.149 \pm 0.147$	7500	99.572	0.014
$m = 4$	$15.538 \pm 0.223$	$4.331 \pm 0.281$	4500	99.799	0.565
$m = 5$	$17.957 \pm 0.244$	$5.198 \pm 0.350$	4500	99.831	0.111
$m = 6$	$21.050 \pm 0.362$	$6.378 \pm 0.600$	2500	99.928	0.214
$m = 7$	$24.732 \pm 0.410$	$7.045 \pm 0.665$	2500	99.832	0.021
$m = 8$	$27.795 \pm 0.433$	$8.847 \pm 0.882$	2500	99.945	0.207
$m = 9$	$30.536 \pm 0.999$	$11.259 \pm 2.680$	500	99.896	0.021
$m = 10$	$33.114 \pm 1.267$	$11.337 \pm 3.156$	358	99.98	0.123

Модель, основанная на компаунд-распределении Пуассона была использована для томографии тепловых состояний с отщеплением фотонов. Было приготовлено и измерено 11 состояний: тепловое и с отщеплением от 1 до 10 фотонов. Результаты представлены в таблице 3.

Из (3) следует, что произведение всех средних в таблице определяет корреляционную функцию теплового поля 11-го порядка:  $g^{(11)} = \frac{\prod_{m=1}^{10} \mu_m}{\mu^{10}}$ . Согласно таблице, натуральный логарифм рассматриваемой величины есть  $\ln g^{(11)} = 17.53 \pm 0.10$  (теоретическое значение равно  $\ln 11! = 17.50$ ).



Гистограмма отражает экспериментальные данные, красная штриховая линия показывает идеальную одноуровневую модель с  $a^{ideal} = 2$ , зеленая сплошная кривая отвечает двухуровневой модели с  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 8.46$ , везде  $\mu = 5.98$ .  
 Рис. 5 — Распределение квадратурной наблюдаемой для теплового состояния после отщепления одного фотона

Для более точного описания экспериментальных данных предложено семейство многоуровневых компаунд-распределений статистики фотонов. Производящая функция  $r$ -го уровня определяется формулой

$$G_r(z | \mu, b_1, \dots, b_r) = \exp[-\mu L_r],$$

где значения функции  $L$  задаются рекуррентным образом:

$$L_0 = (1 - z),$$

$$L_{r+1} = b_{r+1} \ln \left( 1 + \frac{L_r}{b_{r+1}} \right), \quad r = 0, 1, \dots$$

Уровень иерархии задается индексом  $r$ . Нулевой уровень соответствует распределению Пуассона, а первый — ранее рассмотренному гамма-компаунд распределению.

Проведенные эксперименты демонстрируют наличие относительно небольших отклонений от идеальной одноуровневой модели и необходимость учета поправок 2-го уровня. На рисунке 5 приведен пример использования модели 2-го уровня для оценки теплового состояния с одним отщепленным фотоном по экспериментальным данным.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан и исследован эффективный метод квантовой томографии вырожденных и невырожденных трёхфотонных поляризационных состояний. Выполнен анализ различных протоколов квантовых измерений, которые обладают высокой точностью реконструкции в условиях, когда объемы имеющихся статистических данных ограничены. Процедура томографии основывается на корневом подходе к оценке состояния и использовании обобщенной информационной матрицы Фишера для оценки точности.
2. На основе анализа точности протоколов квантовой томографии конечномерных систем, создан метод, позволяющий создавать высокоточные протоколы томографии путем решения задачи, аналогичной задаче упаковки электронов на сфере. Полученное семейство протоколов содержит в себе такие важные наборы, как симметричные информационно полные положительно-значные операторные меры и полные наборы взаимно несмещённых базисов. Показано, что полученные протоколы позволяют достичь более высокой точности реконструкции при фиксированных объемах выборки, чем ранее известные.
3. Предложено теоретическое описание и выполнена обработка экспериментальных данных, связанных с учетом аппаратных ошибок, возникающих вследствие искусственной оптической анизотропии в первоначально изотропных оптических элементах. Проведено исследование явления поляризационного эха, которое является близким аналогом хорошо известного эффекта спинового эха в ядерном магнитном резонансе.
4. Проведен анализ взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений электромагнитного поля и разработан более совершенный метод восстановления квантового состояния электромагнитного поля по их результатам. Предложен метод выработки адекватных моделей на основе результатов квантовой томографии оптических квантовых состояний по квадратурным измерениям. Показано, что полученные методы обладают значительным превосходством по сравнению с описанными в литературе.
5. Разработаны методы, алгоритмы и программы для оптимальной аппроксимации бесконечномерного квадратурного квантового состояния посредством конечномерной модели, в основе которой лежит использование базиса из сдвинутых сжатых фоковских состояний. Разработанные методы обеспечивают существенно более высокую точность восстановления квантовых состояний по сравнению со стандартным подходом, что подтверждается результатами численных экспериментов и теоретического анализа.
6. Показано, что задача измерения корреляционных функций высокого порядка оптических состояний сводится к приготовлению и квадратурному измерению условных оптических состояний, возникающих при отщеплении от исходного пучка заданного числа фотонов. В рамках мо-

дели компанд-распределения Пуассона, развитый подход применен к исследованию статистики фотонов с учетом их группировки в различных состояниях.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно дополнительных квадратурных квантовых измерений / Ю. И. Богданов, Г. В. Авосопянц, Л. В. Белинский, К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, В. Ф. Лукичев // ЖЭТФ. — 2016. — Т. 150, № 2. — С. 246—253.
2. Разработка адекватных моделей оптических квантовых состояний на основе квадратурных измерений / Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, Л. В. Белинский, В. Ф. Лукичев // Микроэлектроника. — 2017. — Т. 46, № 6. — С. 403—410.
3. Analysis of quantum tomography protocol efficiency for triphoton polarization states / Yu. I. Bogdanov, Yu. A. Kuznetsov, G. V. Avosopyants, K. G. Katamadze, L. V. Belinsky, N. A. Borshchevskaya // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016. Vol. 10224. — 2016. — 102242R-102242R-11.
4. *Bogdanov Yu. I., Belinsky L. V.* Finite frames constructed by solving Fekete problem and accuracy of quantum tomography protocols based on them // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014. Vol. 9440. — 2014. — P. 94401L-94401L-8.
5. Mathematical modeling and experimental study of polarization echo in optically anisotropic media / Yu. I. Bogdanov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, E. V. Moreva, V. A. Shershulin, L. V. Belinsky // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2012. Vol. 8700. — 2013. — P. 87001C-87001C-10.
6. Study of higher order correlation functions and photon statistics using multiphoton-subtracted states and quadrature measurements / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // Proceedings of SPIE: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016. Vol. 10224. — 2016. — 102242Q-102242Q-8.
7. Анализ взаимно-дополнительных квадратурных квантовых измерений / Ю. И. Богданов, Г. В. Авосопянц, Л. В. Белинский, К. Г. Катамадзе, В. Ф. Лукичев // Труды второй российско-белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники: импортозамещение и применение» им. О. В. Лосева. — 2015. — С. 209—213.

8. *Богданов Ю. И., Белинский Л. В.* Создание протоколов квантовой томографии путем решения проблемы Томсона // 21-я Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика – 2014»: тезисы докладов. — 2014. — С. 105.
9. Mathematical modeling of polarization echo in optically anisotropic media / Yu. I. Bogdanov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, E. V. Moreva, V. A. Shershulin, L. V. Belinsky // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2012: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2012. — P2–09.
10. *Bogdanov Yu. I., Belinsky L. V.* Mutually Unbiased Bases and SIC-POVM as special cases in the family of solutions to Fekete packing problem in complex space // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2014. — q3–04.
11. Statistical reconstruction of compound Poisson mixtures of Fock states from quadrature measurements / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — q2–05.
12. Informational approach to the tomography of quadrature quantum states / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — q2–01.
13. Analysis of triphoton polarization state tomography accuracy / Yu. I. Bogdanov, Yu. A. Kuznetsov, G. V. Avosopyants, K. G. Katamadze, L. V. Belinsky // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016: Book of Abstracts. — Moscow, Zvenigorod, 10/2016. — P2–54.
14. *Богданов Ю. И., Белинский Л. В.* Оптимизация протоколов томографии квантовых состояний на основе решения задачи Томсона // Труды ФТИАН. — 2015. — Т. 25. — С. 90—98.
15. Поляризационные квантовые операции в анизотропной среде с дисперсией / Ю. И. Богданов, А. А. Калинин, С. П. Кулик, Е. В. Морева, В. А. Шершулин, Л. В. Белинский // Труды ФТИАН. — 2012. — Т. 22. — С. 78—102.

## **Список литературы**

1. *Богданов Ю. И., Валиев К. А., Кокин А. А.* Квантовые Компьютеры: Достижения, Трудности Реализации И Перспективы // Микроэлектроника. — 2011. — Т. 40, № 4. — С. 243—255.

2. Quantum Computing Devices: Principles, Designs, and Analysis / G. Chen, D. Church, B. Englert, C. Henkel, B. Rohwedder, M. Scully, M. Zubairy. — CRC Press, 2006. — (Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science).
3. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. — Mir, 2006. — 824 с.
4. *Валиев К., Кокин А.* Квантовые компьютеры. Надежды и реальность. — РХД, 2001. — 352 с.
5. *Валиев К. А.* Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Усп. физ. наук. — 2005. — Т. 175, № 1. — С. 3—39.
6. Квантовая механика и развитие информационных технологий / Ю. И. Богданов, А. Кокин, В. Лукичев, А. Орликовский, И. Семенихин, А. Чернявский // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2012. — № 1. — С. 17—31.
7. *Sergienko A.* Quantum Communications and Cryptography. — Taylor & Francis, 2005. — 248 p. — (Optical Science and Engineering).
8. *Халево А.* Квантовые системы, каналы, информация. — МЦНМО, 2010.
9. *Bengtsson I., Życzkowski K.* Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. — Cambridge University Press, 2006.
10. *Henderson L., Vedral V.* Classical, quantum and total correlations // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2001. — Vol. 34, no. 35. — P. 6899.
11. *Ollivier H., Zurek W. H.* Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Dec. — Vol. 88, issue 1. — P. 017901.
12. *Zurek W.* Einselection and decoherence from an information theory perspective // Annalen der Physik. — 2000. — Vol. 9, no. 11/12. — P. 855–864.
13. *Aldoshin S. M., Fel'dman E. B., Yurishchev M. A.* Quantum entanglement and quantum discord in magnetoactive materials (Review Article) // Low Temperature Physics. — 2014. — Vol. 40, no. 1. — P. 3–16.
14. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Mar. — Vol. 70, issue 13. — P. 1895–1899.
15. *DiVincenzo D. P.* The Physical Implementation of Quantum Computation // Fortschritte der Physik. — 2000. — Vol. 48. — P. 771–783. — eprint: [quant-ph/0002077](http://quant-ph/0002077).
16. *Preskill J.* Reliable quantum computers // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1998. — Vol. 454, no. 1969. — P. 385–410. — eprint: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/454/1969/385.full.pdf>.

17. *Lvovsky A. I.* Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. — 2004. — Vol. 6, no. 6. — S556.
18. *Богданов Ю. И.* Основные понятия классической и квантовой статистики: корневой подход // *Оптика и спектроскопия*. — 2004. — Т. 96, № 5. — С. 735—746.

*Белинский Леонид Владимирович*

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ВЫСОКОТОЧНОЙ ТОМОГРАФИИ  
КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_